Grammatiche

Dipartimento di Elettronica e Informazione
Politecnico di Milano

27 marzo 2017

Modelli Generativi

Grammatiche

- I modelli di linguaggio/calcolo visti finora definiscono un linguaggio tramite l'*elaborazione* della stringa che gli appartiene
- Vediamo un modello *generativo* del linguaggio: la grammatica
- In generale, una *grammatica* o *sintassi* è un insieme di regole per generare *frasi* di un linguaggio
- Modello molto antico (Pāṇini ne fornì una per il sanscrito tra il 6º e il 4º secolo a.C.), ma di grande efficacia

Grammatica come sistema di riscritture

Esempi (informali)

- "Una frase è formata da un soggetto seguito da un predicato"
  - "Un soggetto è un sostantivo, o un pronome, oppure ..."
  - "Un predicato è un verbo seguito da complementi, oppure ..."
  - Frase $\rightarrow$ soggetto.predicato $\rightarrow$ "Pierino mangia la mela"
  - Specifica sintattica: vale anche "La mela mangia Pierino"
- "Una funzione `ANSI-C-89` è composta da un prototipo, una parte dichiarativa, una esecutiva"
  - Programma $\rightarrow$ prototipo.dichiarativa.esecutiva $\rightarrow$ `int f(void) {int a; a=a+1;}`
- "Un cartello di segnaletica verticale è di obbligo, divieto, pericolo, precedenza, ..."
  - "Un cartello di pericolo è di forma triangolare, bordato in rosso e contiene..."

Grammatica come sistema di riscritture

Riscritture per raffinamenti successivi

- Le regole di una grammatica descrivono un "oggetto principale" (libro, protocollo, messaggio grafico) come un insieme ordinato di "componenti"
- La descrizione è fornita fino ad arrivare al livello di dettaglio desiderato (bit, carattere, forma geometrica elementare)
- Ogni passo di riscrittura può offrire una o più alternative
  - Il soggetto può essere un nome, un pronome ...
- Spesso si tende a chiamare *lessico* la descrizione grammaticale delle singole "parole", *sintassi* quella della loro composizione
  - Dal nostro punto di vista, è un riuso dello stesso modello

Grammatica

Definizione formale

- Una grammatica è una quadrupla $G = \langle \mathbf{V}_t, \mathbf{V}_n, \mathbf{P}, S \rangle$
  - $\mathbf{V}_t$: alfabeto o vocabolario *terminale*
  - $\mathbf{V}_n$: alfabeto o vocabolario *nonterminale*
  - $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n \cup \mathbf{V}_t$: alfabeto o vocabolario
  - $S \in \mathbf{V}_n$: elemento di $\mathbf{V}_n$ detto *assioma* o *simbolo iniziale*
  - $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{V}_n^+ \times \mathbf{V}^*$ insieme delle produzioni sintattiche o regole di riscrittura
- Per semplicità di notazione, dato un elemento $p \in \mathbf{P}$ $p = \langle \alpha, \beta \rangle$ scriveremo $p = \alpha \to \beta$

Grammatica

La relazione di derivazione

- Definiamo la relazione di derivazione immediata $\underset{G}{\Rightarrow}$ per una grammatica $G = \langle \mathbf{V}_t, \mathbf{V}_n, \mathbf{P}, S \rangle$ come $\alpha \underset{G}{\Rightarrow} \beta$ se e solo se $\alpha \in V^+, \beta \in V^*, \alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \beta = \beta_1\beta_2\beta_3,\ \alpha_2 \rightarrow \beta_3 \in \mathbf{P}$
  - Rispetto a $G = \langle \{ab\}, \{S, R\}, \{S \rightarrow aR, R \rightarrow bS, S \rightarrow \varepsilon\}, S \rangle$, abbiamo che $abaR \underset{G}{\Rightarrow} ababS$ ma non è vero che $abaR \underset{G}{\Rightarrow} aba$
- Dove non ambiguo, ometteremo il pedice G che indica la grammatica
- Definiamo $\overset{*}{\Rightarrow}$ come la chiusura riflessiva e transitiva di $\Rightarrow$

Alcuni esempi - 1

Una prima grammatica semplice G_1

- $\mathbf{V}_t = \{a, b, c\}$, $\mathbf{V}_n = \{S, A, B, C\}$ con assioma S
- $\mathbf{P} = \{S \to A,\ A \to aA,\ A \to B,\ B \to bB,\ B \to C,\ C \to cC,\ C \to \varepsilon\}$
- Una possibile derivazione è $S \Rightarrow A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow aaB \Rightarrow aaC \Rightarrow aacC \Rightarrow aaccC \Rightarrow aacccC \Rightarrow aaccc$
- Un'altra possibile derivazione è $S \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow bB \Rightarrow bC \Rightarrow b$
- Linguaggio generato da G, $L(G) = \{a^*b^*c^*\}$

Alcuni esempi - 2

Qualcosa di più sostanzioso G_2

- $\mathbf{V}_t = \{a, b\}, \mathbf{V}_n = \{S\}$ assioma S
- $\mathbf{P} = \{S \to aSbS, S \to \varepsilon\}$
- Una possibile derivazione
  $S \Rightarrow aSbS \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$
- Una ulteriore possibile derivazione
  $S \Rightarrow aSbS \Rightarrow aSbaSbS \Rightarrow abaSbS \Rightarrow ababS \Rightarrow abab$
- Linguaggio generato dalla grammatica? Coppie di a e b “ben parentetizzate”

Alcuni esempi - 3

Qualcosa di *ancora* più sostanzioso G_3

- $\mathbf{V}_t = \{a, b, c\}, \mathbf{V}_n = \{S, A, B, C, D\}$ assioma S
- $\mathbf{P} = \{S \to aACD,\ A \to aAC,\ A \to \varepsilon,\ B \to b,\ CD \to BDc,\ CB \to BC, D \to \varepsilon\}$
- Una possibile derivazione: $S \Rightarrow aACD \Rightarrow aaACCD \Rightarrow aaaACCCD \Rightarrow aaaACCCD \Rightarrow aaaCCCD \Rightarrow aaaCCBDc \Rightarrow aaaCCBDc \Rightarrow aaaCBCDc \Rightarrow aaaBCCDc \Rightarrow aaaBCBDcc \Rightarrow aaaBBCDcc \Rightarrow aaaBBBDccc \Rightarrow aaaBBBccc \stackrel{*}{\Rightarrow} aaabbbccc$
- Linguaggio generato: $L(G) = \{a^n b^n c^n\}$

Alcune domande "naturali"

Utilità pratica

- Dove è possibile utilizzare grammatiche in pratica?

Espressività

- Quali linguaggi è possibile esprimere con una data grammatica?

Relazione con i riconoscitori

- Che relazione sussiste tra i linguaggi generati dalle grammatiche e i linguaggi riconosciuti dagli automi?

Usi pratici delle grammatiche

Modello descrittivo

- Le grammatiche sono ampiamente usate come modello descrittivo di linguaggi di programmazione (C, Scheme, Pascal, ...) e descrizione dati (JSON)
  - Esiste per alcune di esse la possibilità di ottenere automaticamente l'automa riconoscitore del linguaggio generato

Modello generativo

- Generazione automatizzata di input di test per programmi
- Sintesi di frasi in linguaggio "naturale"

Espressività delle grammatiche

Quali linguaggi è possibile esprimere

- Negli esempi precedenti abbiamo visto come sia possibile generare linguaggi che sappiamo essere riconosciuti, usando un automa a potenza minima
  - Da un FSA: è facile costruire un FSA det. a 3 stati che riconosce $L(G_1)$
  - Da un PDA: il riconoscitore di $L(G_2)$ è stato un esempio che abbiamo visto durante le precedenti lezioni
  - Da una MT: serve una MT per riconoscere $L(G_3) = a^n b^n c^n$
- É possibile classificare le grammatiche in base al loro potere generativo

Espressività delle grammatiche

Quali linguaggi è possibile esprimere?

- La gerarchia classica delle grammatiche proposta da Chomsky vede 4 classi, a seconda delle limitazioni (crescenti) imposte sulla forma delle loro produzioni $\alpha \to \beta$

Tipo	Nome	Lim. Produzioni
0	Non limitate	-
1	Dipendenti dal contesto	$\lvert\alpha\rvert \leq \lvert\beta\rvert$
2	Libere dal contesto	$\lvert\alpha\rvert = 1$
3	Regolari	di tipo $A \to a, A \to aA$ oppure $A \to a, A \to Aa$

- Una grammatica più potente genera tutti i linguaggi di una meno potente, ma l'inclusione è stretta?

A quali automi corrispondono?

Grammatiche Regolari e FSA

- Linguaggi gen. da grammatiche regolari $\equiv$ riconosciuti da FSA

Dall'FSA $\mathcal{A}$ alla grammatica

- Poniamo $\mathbf{V}_n = \mathbf{Q}, \mathbf{V}_t = \mathbf{I}, S = \langle q_0 \rangle$
- Per ogni $\delta(q, i) = q'$ diciamo che $\langle q \rangle \to i \langle q' \rangle \in \mathbf{P}$
- Se $q' \in \mathbf{F}$ aggiungiamo anche $\langle q \rangle \to i \in \mathbf{P}$
- Facile mostrare per induzione che $\delta^*(q_0, x) = q'$ sse $\langle q_0 \rangle \stackrel{*}{\Rightarrow} q'$

Dalla grammatica all'FSA (non deterministico)

- $\mathbf{Q} = \mathbf{V}_n \cup \{q_f\}, \mathbf{I} = \mathbf{V}_t, q_0 = S, \mathbf{F} = \{q_f\}$
- Se $A \to bC \in \mathbf{P}$, $\delta(A, b) = C$; Se $A \to b \in \mathbf{P}$, $\delta(A, b) = q_f$

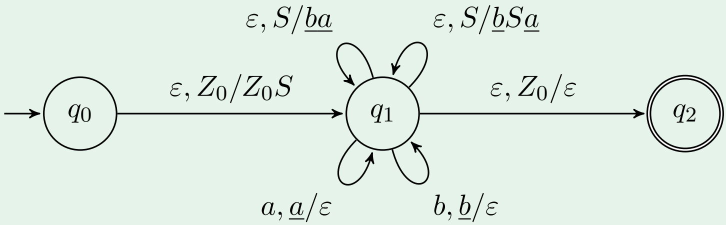
A quali automi corrispondono?

Grammatiche Regolari e FSA

- I linguaggi generati dalle grammatiche libere dal contesto coincidono con i riconosciuti dagli AP non deterministici
- Dimostrazione non banale, diamo l'intuizione

Dalla grammatica all'AP ND

- Data $\langle \{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab\}, S \rangle$



A quali automi corrispondono?

Grammatiche non limitate e MT

- Le grammatiche non limitate (tipo 0) corrispondono alle MT
- Costruiamo, senza pretesa di formalizzazione qui, una MT ND che accetti $L(G)$
- $\mathcal{M}$ ha un nastro di memoria, inizializzato con Z_0S
- La stringa da riconoscere è sul nastro di ingresso
- Il nastro di memoria viene scandito alla ricerca di una parte sinistra di una qualche produzione $p \in \mathbf{P}$
- Quando una viene trovata (scelta nondeterministicamente), viene sostituita con la sua parte destra
- Se ve n'è più di una, si opera ancora nondeterministicamente

Grammatiche non limitate e MT

Funzionamento della MT

- Per come abbiamo costruito la MT ND, sappiamo che

$$\alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } c = \langle q, Z_0, \alpha \rangle \overset{*}{\vdash} \langle q, Z_0, \beta \rangle$$

- In questo modo, quando (e *se*) sul nastro di memoria si raggiunge un contenuto fatto di soli elementi di $\mathbf{V}_t$, lo si può confrontare con la stringa in ingresso x e
  - se coincide accettare x
  - se non coincide, questa computazione tra quelle eseguite nondeterministicamente non è di accettazione
- N.B. Il nondeterminismo della MT è utile, ma non essenziale
- Resta il problema di sapere *se* la MT termina...

Grammatiche non limitate e MT

Emulare una MT con una grammatica non ristretta

- Senza perdere di generalità, emuliamo una MT $\mathcal{M}$ a nastro singolo con una grammatica G non ristretta
- Considerato che G può "manipolare" solo elementi di $\mathbf{V}_n$, faccio in modo che generi stringhe della forma $x\ddagger X$ con $\ddagger \in \mathbf{V}_n, x \in \mathbf{V}_t^*$ e X che è costituita da "copie nonterminali" degli elementi di X
  - Ad esempio, se $x = abac$, genero la stringa $abac\ddagger ABAC$
- Obiettivo: avere una derivazione $x\ddagger X \overset{*}{\Rightarrow} x$ se e solo se x è accettata da $\mathcal{M}$
- Simuleremo ogni mossa di $\mathcal{M}$ con una derivazione diretta di G

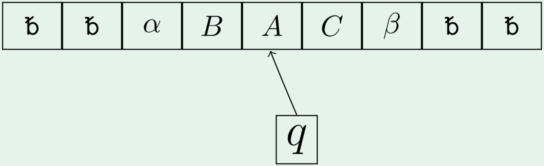
Grammatiche non limitate e MT

Impostazione della parte iniziale di G

- Assumendo $\mathbf{I} = \mathbf{V}_t = \{a, b\}$ la parte delle produzioni di G che genera le stringhe appena descritte è:
  - $S \to SA'A, \; S \to SB'B, \; S \to \ddagger$ (genero coppie di simboli)
  - $AA' \to A'A, \; BA' \to A'B$ (faccio "scorrere" le A' a sx)
  - $AB' \to B'A, \; BB' \to B'B$ (faccio "scorrere" le B' a sx)
  - $\ddagger A' \to a\ddagger, \; \ddagger B' \to b\ddagger$ (quando "scorro" attraverso $\ddagger$ trasformo il nonterminale in terminale)

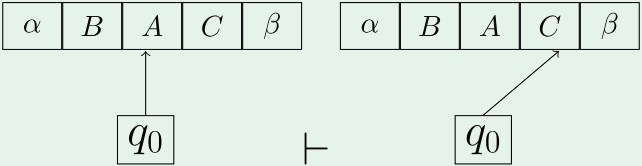
Grammatiche non limitate e MT

Emulare le mosse



- Rappresento la configurazione qui sopra con $\ddagger\alpha BqAC\beta$
- Se è definita:
  - $\delta(q, A) = \langle q', A', R\rangle$ aggiungo $qA \to A'q'$ alle prod. di G
  - $\delta(q, A) = \langle q', A', S\rangle$ aggiungo $qA \to q'A'$ alle prod. di G
  - $\delta(q, A) = \langle q', A', L\rangle$ aggiungo, $\forall B$ nell'alfabeto di $\mathcal{M}$, $BqA \to q'BA'$ alle prod. di G (n.b. l'alfabeto di $\mathcal{M}$ è unico)

Emulare le mosse



- se e solo se $\ddagger \alpha B q A C \beta \Rightarrow \ddagger \alpha B A' q' C \beta$
- La costruzione di G va completata aggiungendo regole che cancellano tutto ciò che sta a destra del $\ddagger$ ($\ddagger$ incluso) se e solo se la configurazione della $\mathcal{M}$ è accettante, e.g. $\ddagger \alpha B q_f A C \beta$

Rimanenti corrispondenze

Automi a pila deterministici

- Esiste un sottoinsieme (proprio) delle grammatiche libere dal contesto che genera i linguaggi riconosciuti dagli AP D
- Restrizione difficile da esprimere sulla forma delle produzioni
- Dettagliata del corso di Formal Languages and Compilers

Grammatiche dipendenti dal contesto

- Le grammatiche di tipo 1 corrispondono a un sottoinsieme delle MT di cui è certo che terminano sempre
- N.B. non si tratta delle uniche MT che terminano sempre
- Consentono sempre di sapere se una stringa x è generata da G (si può costruire l'insieme delle stringhe gen. da G lunghe quanto x e vedere se essa appare)