Logica Matematica

Dipartimento di Elettronica e Informazione
Politecnico di Milano

21 aprile 2017

La logica come formalismo descrittivo

Un ulteriore linguaggio di specifica

- Logica: un formalismo "universale" alternativo al linguaggio naturale
  - Vantaggi: non ambiguità, possibile dimostrare in modo automatico proprietà desiderate
- Applicata in contesti molto vari: da ingegneria informatica a ingegneria dei sistemi
- Esistono formalismi applicativi basati sulla logica:
  - Linguaggi di programmazione (Prolog, Datalog)
  - Linguaggi di specifica (Z è lo standard ISO/IEC 13568)

La logica come formalismo descrittivo

Usi esaminati in questo corso

- Specifica di linguaggi formali (logica monadica del primo e secondo ordine)
- Logica per la specifica di comportamento (I/O) di programmi
- Logica per la specifica delle proprietà di sistemi temporizzati

Logica monadica del prim'ordine (MFO)

Sintassi ed interpretazione

- La MFO è un sottoinsieme (proprio) della logica del prim'ordine che consente di descrivere parole su un alfabeto $\mathbf{I}$
- Sintassi :
  - una formula φ è $\varphi \stackrel{\Delta}{=} a(x) \mid x < y \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \forall x(\varphi)$
  - dove $a \in \mathbf{I}$: una lettera predicativa per ogni simbolo di $\mathbf{I}$
- Interpretazione:
  - il dominio delle variabili è un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$
  - $<$ corrisponde alla relazione di minore

Alcune abbreviazioni

Concetti ricorrenti

- Come sempre:
  - $\varphi_1 \vee \varphi_2 \stackrel{\Delta}{=} \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$
  - $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \stackrel{\Delta}{=} \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$
  - $\exists x(\varphi) \stackrel{\Delta}{=} \neg\forall x(\neg\varphi)$
  - $x = y \stackrel{\Delta}{=} \neg(x < y) \wedge \neg(x > y)$
  - $x \leq y \stackrel{\Delta}{=} \neg(y < x)$
- In aggiunta:
  - La costante 0: $x = 0 \stackrel{\Delta}{=} \forall y(\neg(y < x))$
  - La funzione successore $S(x)$:
    $S(x) = y \stackrel{\Delta}{=} (x < y) \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)$
  - Le costanti $1, 2, 3, \ldots$ come $S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots$

Interpretazione come parole su $\mathbf{I}$

Interpretazione di $a(x)$

- $a(x)$ è vero $\Leftrightarrow$ l'x-esimo simbolo di $w \in \mathbf{I}^*$ è a
  - gli indici di w partono da 0

Esempi

- Formula vera su tutte e sole le parole non vuote che iniziano per a: $\exists x(x = 0 \wedge a(x))$
- Formula vera su tutte e sole le parole in cui ogni a è seguita da una b: $\forall x(\ a(x)\ \Rightarrow\ \exists y(y = S(x) \wedge b(y))\ )$
- Formula vera per la sola stringa vuota: $\forall x\ (a(x) \wedge \neg a(x))$

Altre abbreviazioni convenienti

Abbreviazioni per indici comodi

- $y = x + 1$ indica $y = S(x)$
- generalizzando, se $k \in \mathbb{N}, k > 1$ indichiamo con $y = x + k$ $\exists z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}(z_1 = x + 1, z_2 = z_1 + 1, \ldots, y = z_{k-1} + 1)$
- $y = x - 1$ indica $x = S(y)$, ovvero $x = y + 1$, così come $y = x - k$ indica $x = y + k$
- $last(x)$ indica $\neg\exists y(y > x)$

Esempi

- Parole non vuote terminanti per a: $\exists x(last(x) \wedge a(x))$
- Parole con almeno 3 simboli di cui il terzultimo è a $\exists x(a(x) \wedge \exists y(y = x + 2 \wedge last(y)))$ Abbreviando: $[\exists x(a(x) \wedge last(x + 2))]$

Semantica formale

Semantica dei componenti di una formula

- Dati $w \in \mathbf{I}^+$ e $\mathbf{V}_1$ insieme delle variabili, un assegnamento è una funzione $v_1 : \mathbf{V}_1 \to \{0, 1, \ldots, |w| - 1\}$
  - $w, v_1 \vDash a(x)$ se e solo se $w = uav$ e $|u| = v_1(x)$
  - $w, v_1 \vDash x < y$ se e solo se $v_1(x) < v_1(y)$
  - $w, v_1 \vDash \neg\varphi$ se e solo se $w, v_1 \nvDash \varphi$
  - $w, v_1 \vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ se e solo se $w, v_1 \vDash \varphi_1$ e $w, v_1 \vDash \varphi_2$
  - $w, v_1 \vDash \forall x(\varphi)$ se e solo se $w, v_1' \vDash \varphi$ per ogni v_1' con $v_1'(y) = v_1(y)$ con y diversa da x

Linguaggio di una formula

- $L(\varphi) = \{w \in \mathbf{I}^+ \mid \exists v : w, v \vDash \varphi\}$

Proprietà della MFO

Chiusura rispetto ad operazioni

- I linguaggi esprimibili con MFO sono chiusi per unione, intersezione, complemento
  - Basta combinare le formule con $\wedge$, $\vee$, $\neg$
- In MFO non posso esprimere $L = \{a^{2n}, n \in \mathbb{N}\}$ su $\mathbf{I} = \{a\}$
- MFO è strettamente *meno* potente degli FSA
  - Da una formula in MFO posso sempre costruire un FSA equivalente
  - L può essere riconosciuto solo da un FSA

Proprietà della MFO

Chiusura rispetto alla $*$ di Kleene

- I linguaggi definiti da una formula MFO non sono chiusi rispetto alla $*$ di Kleene
  - la formula $a(0) \wedge a(1) \wedge last(1)$ definisce $L = \{aa\}$
  - la $*$-chiusura di L è il linguaggio delle stringhe di a pari
- MFO è in grado di definire i linguaggi *star-free*: sono i linguaggi ottenuti per unione, intersezione, concatenazione e complemento di linguaggi finiti
- Come definire tutti i REG?

Logica Monadica del Secondo Ordine (MSO)

Quantificare insiemi di posizioni

- Per avere lo stesso potere espressivo degli FSA basta "solo" permettere di quantificare sui predicati monadici
  - In pratica, quantificare su *insiemi* di posizioni
  - Quantificazione su predicati del prim'ordine $\rightarrow$ logica del secondo ordine
- Ammettiamo formule come $\exists X\ (\varphi)$ con X appartenente all' insieme dei predicati monadici (insiemi di posizioni)
- Convenzione: usamo maiuscole e minuscole
  - Maiuscole per indicare variabili con dominio l' insieme dei predicati monadici
  - Minuscole per indicare variabili $\in \mathbb{N}$

Semantica

Assegnamento delle variabili

- L'assegnamento di variabili del 2º ordine (insieme $\mathbf{V}_2$) è una funzione $v_2 : \mathbf{V}_2 \to \wp(\{0, 1, \ldots, |w| - 1\})$
  - $w, v_1, v_2 \vDash X(x)$ se e solo se $v_1(x) \in v_2(X)$
  - $w, v_1, v_2 \vDash \forall X(\varphi)$ se e solo se $w, v_1' \vDash \varphi$ per ogni v_2' con $v_2'(Y) = v_2(Y)$, con Y diversa da X

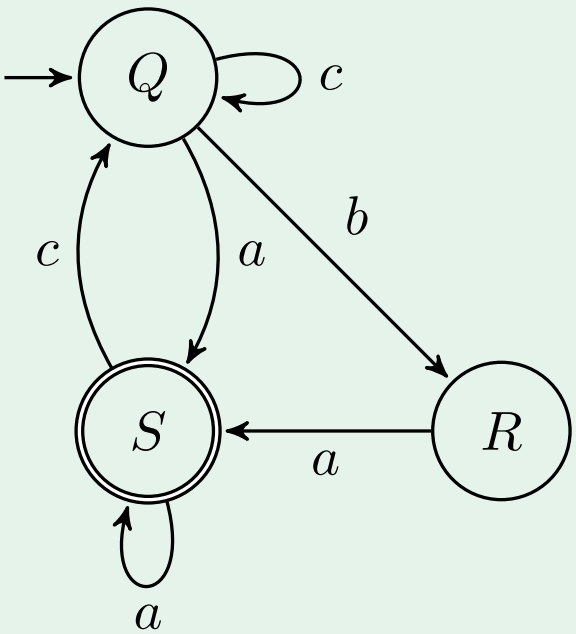
Esempio

- Possiamo descrivere il linguaggio $L = \{a^{2n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$$\begin{aligned} \exists P(\forall x(\quad & a(x) \wedge \\ & (\neg P(x) \Leftrightarrow P(x+1)) \wedge \\ & \neg P(0) \wedge \\ & (last(x) \Rightarrow P(x)) \qquad)) \end{aligned}$$

Da FSA a MSO

Una formula MSO per ogni FSA



$$
\begin{aligned}
&\exists Q, R, S(\\
&\quad \forall z(&& \neg(Q(z) \wedge R(z)) \wedge \neg(Q(z) \wedge S(z)) \wedge \\
&\qquad && \neg(R(z) \wedge S(z)) \wedge \\
&\quad Q(0) && \wedge \\
&\quad \forall x, y(&& (y = x + 1 \wedge \neg(last(x))) \Rightarrow \\
&\qquad && (Q(x) \wedge c(x) \wedge Q(y)) \vee \\
&\qquad && (Q(x) \wedge b(x) \wedge R(y)) \vee \\
&\qquad && (Q(x) \wedge a(x) \wedge S(y)) \vee \\
&\qquad && (R(x) \wedge a(x) \wedge S(y)) \vee \\
&\qquad && (S(x) \wedge a(x) \wedge S(y)) \vee \\
&\qquad && (S(x) \wedge c(x) \wedge Q(y)) \vee \\
&\qquad && (last(x) \Rightarrow \ Q(x) \wedge a(x) \vee \\
&\qquad && \ R(x) \wedge a(x) \vee \\
&\qquad && \ S(x) \wedge a(x)) \\
&\quad))
\end{aligned}
$$

Da MSO a FSA

Completare l' equivalenza

- Data una φ MSO, si può sempre costruire un FSA che accetta esattamente $L(\varphi)$ (teorema di Büchi-Elgot-Trakhtenbrot)
  - La dimostrazione dell'esistenza è costruttiva: mostra come costruire l'FSA a partire da una formula MSO (non la vediamo per semplicità)
- La classe dei linguaggi definibili via MSO coincide con REG

Logica per definire proprietà dei programmi

Un formalismo per definire gli effetti

- Specifica di un algoritmo di ricerca: la variabile found $\in \{0, 1\}$ deve valere 1 se e solo se esiste un elemento dell' array a di n elementi uguale all' elemento x cercato
  - found $\Leftrightarrow \exists i(a[i] = x \wedge 0 \leq i \leq n - 1)$
- Specifica di un algoritmo di inversione out-of-place di un array a in un array b
  - $\forall i, (0 \leq i \leq n - 1 \Rightarrow b[i] = a[n - 1 - i])$

Più in generale

Pre- e Post-condizioni

- Abbiamo un insieme di condizioni espresse come formule che devono essere vere prima dell' esecuzione di un programma P (*pre-condizioni*) affinchè siano vere un insieme di fatti dopo la sua esecuzione (*post-condizioni*)
- Esempio: ricerca di un elemento x in un array ordinato a

  Pre $\{\forall i, (0 \leq i \leq n-2 \Rightarrow a[i] \leq a[i+1])\}$

  - Esecuzione del programma `P`

  Post $\{\text{found} \Leftrightarrow \exists i(a[i] = x \wedge 0 \leq i \leq n-1)\}$
- N.B. le pre e post precedenti non implicano che `P`sia un algoritmo di ricerca binaria: una ricerca lineare funziona ugualmente
- Controesempio: un algoritmo di ricerca binaria non garantirebbe post se pre fosse semplicemente $\{True\}$

Un ulteriore esempio

Ordinamento di array di n elementi senza ripetizioni

Pre $\{\neg\exists i, j\ (\ 0{\leq}i{\leq}n{-}1\ \wedge\ 0{\leq}j{\leq}n{-}1\ \wedge\ a[i]{=}a[j]\ \wedge\ i{\neq}j)\}$

- Esecuzione di `ORD`

Post $\{\forall i, (\ 0{\leq}i{\leq}n{-}2 \Rightarrow a[i] \leq a[i+1])\}$

"Buone" specifiche

- É una specifica "adeguata"?
- La specifica agisce come un "contratto" con chi deve sviluppare `ORD`, così come con chi usa il programma sviluppato

Ordinamento di array di n elementi senza ripetizioni

Una specifica più accurata

Pre $\{ \neg\exists i,j\ (\ 0{\leq}i{\leq}n{-}1\ \wedge\ 0{\leq}j{\leq}n{-}1\ \wedge\ a[i]{=}a[j]\ \wedge\ i{\neq}j)\ \wedge$
$\forall i(\ 0{\leq}i{\leq}n{-}1 \Rightarrow a[i] = b[i])\ \}$

- Esecuzione di `ORD`

Post $\{\ \forall i,(\ 0{\leq}i{\leq}n{-}2 \Rightarrow a[i]{\leq}a[i+1])\ \wedge$
$\forall i(\ 0{\leq}i{\leq}n{-}1 \Rightarrow \exists j(\ 0{\leq}j{\leq}n{-}1\ \wedge a[i] = b[j]))\ \wedge$
$\forall j(\ 0{\leq}j{\leq}n{-}1 \Rightarrow \exists i(\ 0{\leq}j{\leq}n{-}1\ \wedge a[i] = b[j]))\ \}$

"Buone" specifiche

- Se eliminiamo la prima porzione della Pre, la specifica è ancora valida?
- La specifica data è un "buon" modello anche per l' ordinamento di una lista o un file?

Logica per specificare proprietà di sistemi

Una lampada a pulsante

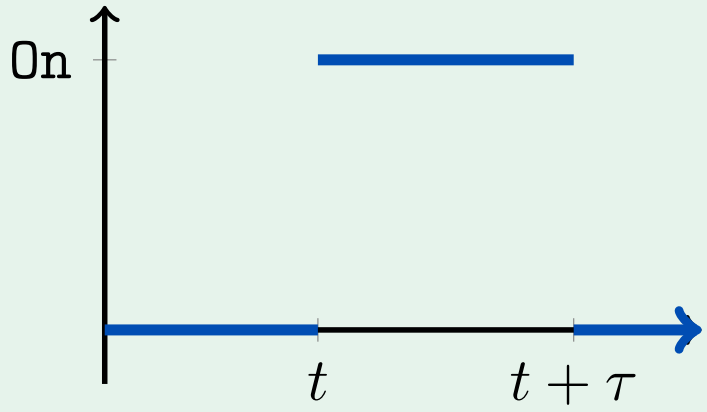
- Informalmente "se premo il pulsante, la luce si accende entro τ secondi
  - $\texttt{Push}(t)$: predicato vero quando il pulsante è premuto all'istante t
  - $\texttt{L\_on}(t)$: pred. vero quando la luce è accesa all'istante t
- Un primo tentativo di specifica potrebbe essere:

$$\forall t \ (\ \texttt{Push}(t) \Rightarrow \exists t_1 (\ t \leq t_1 \leq t + \tau \wedge \texttt{L\_on}(t_1))\ )$$

- Prestando attenzione a cosa indica questa specifica, si nota che presenta alcune divergenze rispetto al comportamento "atteso" da parte di un pulsante di accensione della luce

Un pulsante temporizzato

Primo tentativo di formalizzazione

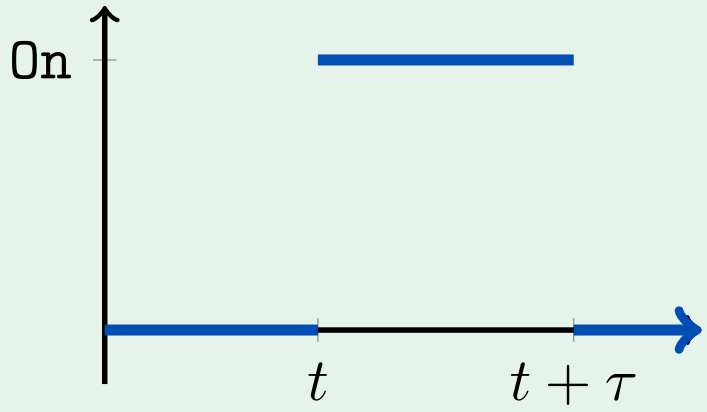


$$\forall t(\ \texttt{Push}(t) \Rightarrow \forall t_1(t \leq t_1 \leq t+\tau \Rightarrow \texttt{L\_on}(t_1)) \wedge \forall t_2(t+\tau \leq t_2 \Rightarrow \texttt{L\_off}(t_2))\ )$$

- Non ancora... se premo il pulsante a luce accesa?

Un pulsante temporizzato

Secondo tentativo di formalizzazione

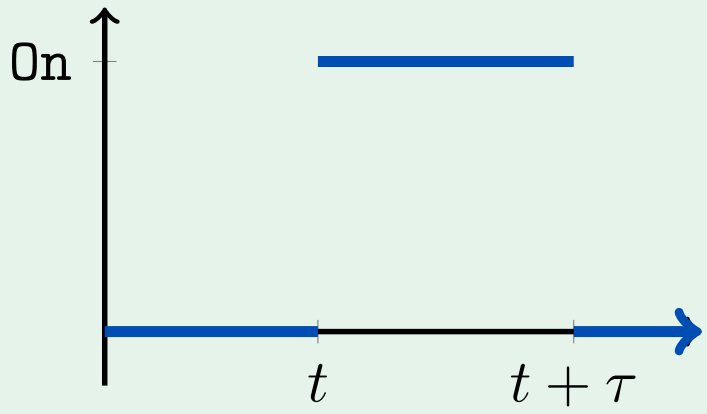


$$\forall t(\ (\ \texttt{Push}(t) \wedge \texttt{L\_off}(t)\ ) \Rightarrow$$
$$\forall t_1(\ t \leq t_1 \leq t+\tau \Rightarrow \texttt{L\_on}(t_1)\ )\ \wedge\ \texttt{L\_off}(t+k)\ )\quad \wedge$$
$$\forall t_3, t_4(\ \texttt{L\_off}(t_3) \wedge \forall t_5(t_3 \leq t_5 \leq t_4 \Rightarrow \neg\texttt{Push}(t_5)) \Rightarrow \texttt{L\_off}(t_4))$$

- Meglio, ma nulla vieta che la luce sia accesa *e* spenta....

Un pulsante temporizzato

Terzo (ed ultimo) tentativo di formalizzazione



$$\forall t(\ \texttt{L\_on}(t) \Leftrightarrow \neg\texttt{L\_off}(t)\ ) \wedge$$
$$\forall t(\ \texttt{Push}(t) \Rightarrow$$
$$\quad \exists\delta(\forall t_1(t-\delta<t_1<t\ \vee\ t>t_1>t+\delta) \Rightarrow \neg\texttt{Push}(t_1))) \wedge$$
$$\forall t(((\texttt{Push}(t) \wedge \exists\delta(\forall t-\delta<t_1<t \Rightarrow \texttt{L\_off}(t_1)\ )\ ) \Rightarrow$$
$$\quad \forall t_1(t \le t_1 \le t+k \Rightarrow \texttt{L\_on}(t_1)) \wedge \texttt{L\_off}(t+k)\ \ ) \wedge$$
$$\forall t_3, t_4(\ \texttt{L\_off}(t_3) \wedge \forall t_5(t_3 \le t_5 \le t_4 \Rightarrow \neg\texttt{Push}(t_5)) \Rightarrow \texttt{L\_off}(t_4))$$

Variazioni sul tema

Possibili alternative a modifiche ridotte

- Pulsante di spegnimento al posto di spegnimento temporizzato
- Pulsante che necessita di essere tenuto premuto
  - La luce resta sempre accesa fin quando il pulsante è premuto
  - ... oppure ha uno spegnimento di sicurezza dopo τ

Sull'approccio in generale

- Logica come formalismo descrittivo per sistemi reali: generale, ma sistematico e non ambiguo

Verso metodi e linguaggi di specifica

Verifiche di correttezza di implementazioni

1. Specificare i requisiti di un algoritmo in un'opportuna logica
2. Implementare l'algoritmo in un opportuno linguaggio
3. Ottenere la correttezza dell'implementazione come dimostrazione (automatizzata) di un teorema

Logica come descrizione di "dati"

- É possibile scegliere un'opportuna logica per descrivere un insieme di concetti
  - e.g., RDF per pagine web, logiche descrittive per dati biomedici
- Se la logica è opportuna (= è possibile calcolare la verità di un dato teorema) possiamo automatizzare la validazione di nostre deduzioni su vaste quantità di dati