POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
1° prova parziale, 6/5/2016

COGNOME:_______________________ NOME: _______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: _________________________

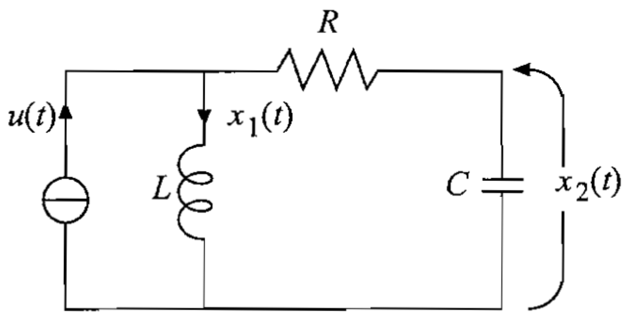
FIRMA: _____________________________________ Visto del docente:______

8	6	8	4	4	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Si consideri la rete elettrica in figura, in cui $R > 0$ e $C = L = 1$.



a) Scrivere le equazioni di stato e di uscita, considerando come variabile di uscita la corrente nell'induttore.
b) Discutere la stabilità del sistema al variare di R.
c) Alla rete elettrica a riposo (stato iniziale nullo) viene applicato l'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$ nell'intervallo $0 < t < 10$ e quindi l'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = -1$ nell'intervallo $10 < t < 20$. Rappresentare graficamente, nello spazio di stato, la corrispondente traiettoria del sistema nell'intervallo $0 < t < 20$, nei due casi $R = 1$ e $R = 4$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L}\left(R(u - x_1) + x_2\right) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}(u - x_1) \end{cases} \xrightarrow{C = L = 1} A = \begin{vmatrix} -R & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} R \\ 1 \end{vmatrix} = b$

$y = x_1$ $\qquad c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + R\lambda + 1 = 0$ $\qquad \alpha_1, \alpha_2 > 0 \quad \forall R$

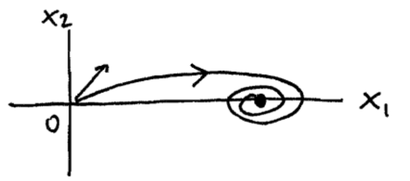
$\Longleftrightarrow$ A asintoticamente stabile $\forall R$

autovalori:

$\lambda = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4}}{2}$

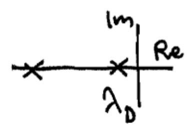
c) equilibrio: $(\bar{u} = 1)$ $\begin{cases} 0 = -R\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + R \\ 0 = -\bar{x}_1 + 1 \end{cases}$ $\qquad \bar{x} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\boxed{R = 1}$: $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, complessi coniugati $\rightarrow$ FUOCO STABILE



$\dot{x}\big|_{x=0} = b\bar{u} = \begin{vmatrix} R \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

$\boxed{R = 4}$: $\lambda = -2 \pm \sqrt{3}$, reali negativi $\rightarrow$ NODO STABILE



$Aw = \lambda w \Rightarrow -w_1 = \lambda w_2$

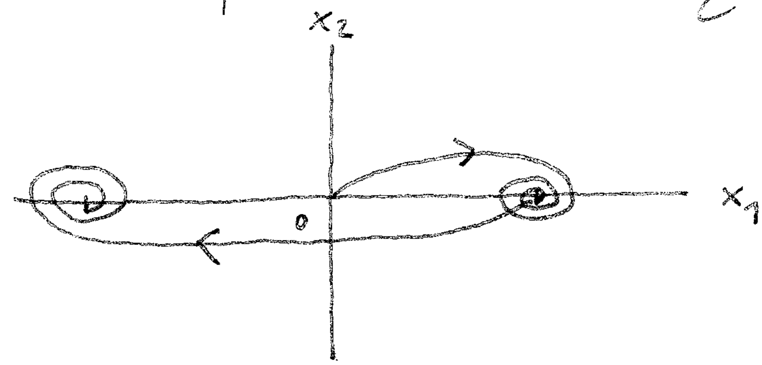
L'equilibrio è raggiunto dopo circa $T_R \simeq 5T_D$, quindi $T_R \simeq 10$ per $R = 1$, $T_R \cong 5 \cdot (1/(2-\sqrt{3})) \simeq 18.7$ per $R = 4$.

Nel primo caso, il sistema è già all'equilibrio a $t = 10$, quando $\bar{u}$ cambia valore. Nel secondo caso non è invece ancora arrivato all'equilibrio (NB: calcolatrice alla mano, si può verificare che $\exp(-t/T_D) \simeq 0.07$ a $t = 10$: la traiettoria è quindi vicina all'equilibrio).

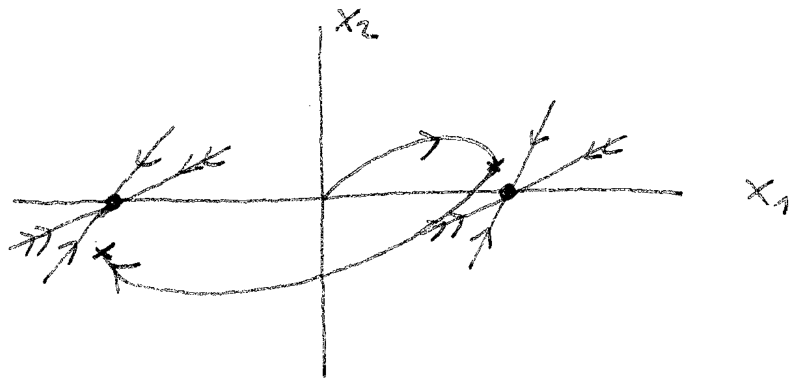
Poiché, in generale, $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$, se $\bar{u}$ inverte il segno lo stesso fa $\bar{x}$. Quindi $\bar{x} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ per $\bar{u} = -1$.

Le traiettorie complessive sono le seguenti:

$\boxed{R = 1}$



$\boxed{R = 4}$



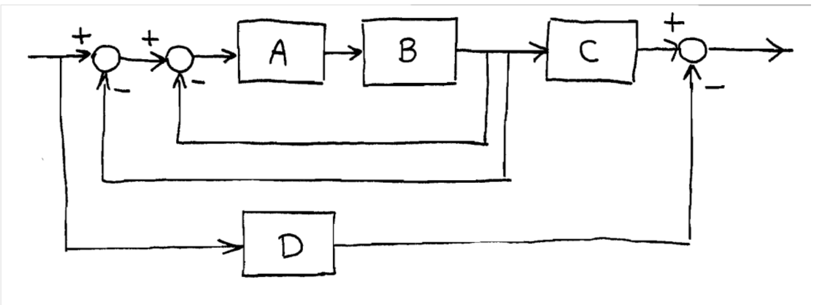
2) Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura. Il blocco B ha funzione di trasferimento

$$G_B(s) = \frac{s}{s-2}$$

Il blocco C è descritto dal modello ingresso/uscita $\ddot{y}_C + 8\dot{y}_C + y_C = -4\dot{u}_C$. Il blocco D è descritto dal modello interno

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



a) Supponendo che il blocco A sia descritto dalla funzione di trasferimento

$$G_A(s) = \frac{\alpha}{s+\beta}$$

discutere (motivatamente) per quali valori di (α, β) il sistema in figura risulta asintoticamente stabile.
b) Scelta una qualunque coppia (α, β) che rende il sistema asintoticamente stabile, determinare tutte le costanti di tempo del sistema e il tempo di risposta.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) F: (A cascata B) con retroazione unitaria

$$F(s) = \frac{\frac{\alpha}{s+\beta} \cdot \frac{s}{s-2}}{1 + \frac{\alpha}{s+\beta} \cdot \frac{s}{s-2}} = \frac{\alpha s}{s^2 + (\alpha+\beta-2)s - 2\beta}$$

H: F con retroazione unitaria

$$H(s) = \frac{\frac{\alpha s}{s^2+(\alpha+\beta-2)s-2\beta}}{1 + \frac{\alpha s}{s^2+(\alpha+\beta-2)s-2\beta}} = \frac{\alpha s}{s^2 + (2\alpha+\beta-2)s - 2\beta}$$

H asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta-2>0 \\ -2\beta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta<0 \\ \alpha>1-\frac{\beta}{2} \end{cases}$

H, C, D sono collegati in cascata/parallelo :

Σ asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ H, C, D asint. stabili

C: $\underbrace{(s^2+8s+1)}_{\alpha_1,\alpha_2>0}y_c = -4s \cdot u_c$

$\alpha_1, \alpha_2 > 0 \Rightarrow$ asint. stabile

D: $A = \left[\begin{array}{c|cc|cc} -1 & 2 & & 3 & 4 \\ \hline 0 & -2 & & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & & -1 & 1 \\ 0 & -2 & & 0 & -2 \end{array}\right]$ $\quad \sigma(A) = \{-1, -2, -1, -2\} \Rightarrow$ asint. stabile

QUINDI: Σ asint. st. $\Leftrightarrow$ $\beta<0$, $\alpha>1-\frac{\beta}{2}$

b) Scelgo $\alpha=4$, $\beta=-2$: $H(s) = \frac{4s}{s^2+4s+4} = \frac{4s}{(s+2)^2}$

$\{T\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

C: $s = -4 \pm \sqrt{16-1} = -4 \pm \sqrt{15}$

$\{T\} = \{\frac{1}{-4\pm\sqrt{15}}\} = \{0.127, +7.87\}$

D: $\{T\} = \{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$

Quindi per l'intero sistema: $\{T\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0.127, \underbrace{7.87}_{T_D,\ T_R \simeq 39.4}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$

3) La competizione tra due fornitori di servizi può essere descritta da un modello del tipo:

$$\dot{x}_1 = x_1\left(1 - \frac{x_1}{2}\right) - \frac{x_1 x_2}{2}$$
$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_2) - x_1 x_2$$

in cui x_1 e x_2 rappresentano l'ammontare dei contratti di fornitura stipulati dai due competitori.

a) Determinare tutti gli stati di equilibrio del sistema.
b) Studiarne la stabilità con il metodo di linearizzazione.
c) Utilizzando il quadro locale delle traiettorie nell'intorno degli stati di equilibrio, e sfruttando le informazioni fornite dallo studio delle isocline, proporre un plausibile quadro delle traiettorie nel primo quadrante.
d) In base ai risultati del punto c), determinare il bacino di attrazione (limitatamente agli stati iniziali non negativi) degli equilibri asintoticamente stabili, se ve ne sono.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{x}_1 = x_1 \left(1 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right)$

$\dot{x}_2 = x_2 \left(1 - x_2 - x_1\right)$

Equilibri : $A = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\quad C = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$

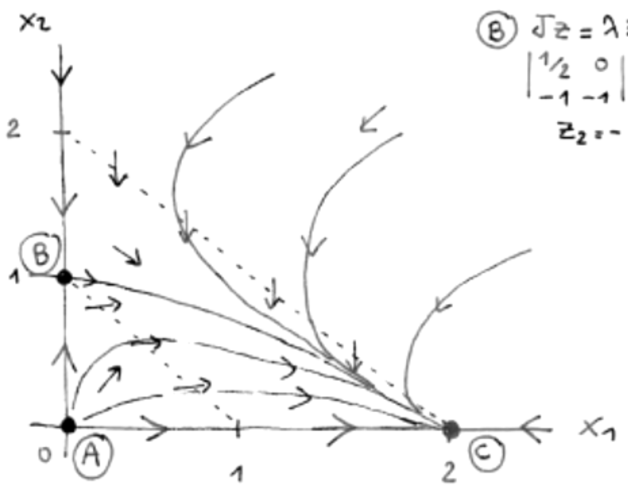
b) $J(x) = \begin{vmatrix} 1 - x_1 - \frac{x_2}{2} & -\frac{x_1}{2} \\ -x_2 & 1 - 2x_2 - x_1 \end{vmatrix}$

$J(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\quad$ A e' instabile (nodo)

$J(B) = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = -1$ $\quad$ B e' instabile (sella)

$J(C) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$ $\quad$ C e' asint. stabile (nodo)

c)



B $\quad Jz = \lambda z \quad , \lambda = 1/2$

$\begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}$

$z_2 = -\,^2/_3\, z_1$, varietà inst.

d) $B(\bar{x}_c) = \{ x \mid x_1 > 0,\ x_2 \geq 0 \}$

4) Ciascuna delle tre affermazioni sotto riportate è FALSA. Per ciascuna di esse si proponga quindi un controesempio, vale a dire si proponga una coppia (A, b) mostrando sinteticamente che falsifica l'affermazione.

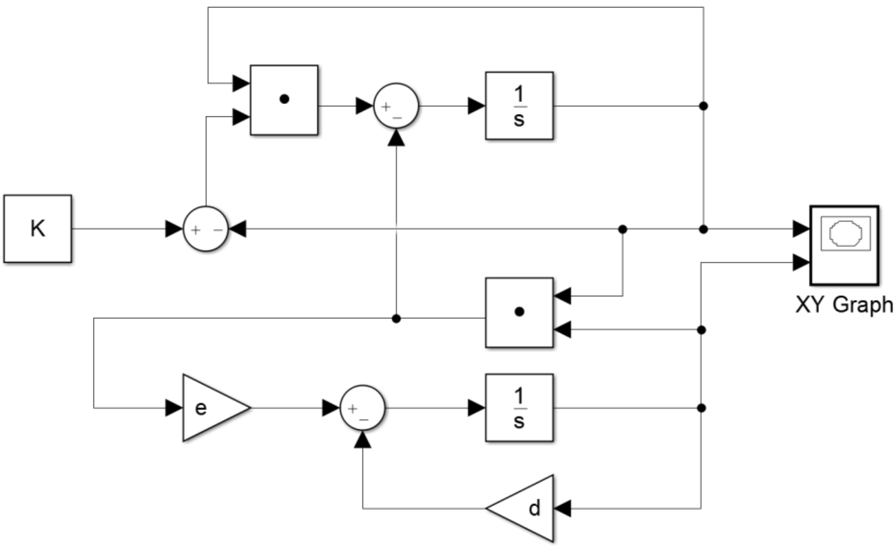
a) Ogni sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, con u costante positivo, ha almeno uno stato di equilibrio.

b) Ogni sistema lineare asintoticamente stabile $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, con u costante positivo, ha infiniti stati di equilibrio.

c) Ogni sistema lineare instabile $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, con u costante positivo, non ammette stati di equilibrio.

5) Dato il sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ si definiscano, in base al movimento libero, i concetti di sistema asintoticamente stabile, semplicemente stabile e instabile. Quindi, note le caratteristiche degli autovalori di A, si dica sotto quali condizioni il sistema è instabile.

6) Si scrivano le equazioni di stato del sistema descritto dal grafico Simulink in figura.



Risposte ai quesiti 4-5-6 [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

4)

Propongo 3 controsempi con $n=1$:

a) $A=0$, $b=1$: $\dot{x} = u > 0$, <u>non esiste</u> $\bar{x}$: $\dot{x} = 0$.

b) $A=-1$, $b=1$: $\dot{x} = -x + u$, $\bar{x} = u$, <u>unico</u>.

c) $A=1$, $b=1$: $\dot{x} = x + u$, $\bar{x} = -u$, <u>esiste unico</u>.

5) A è asintoticamente stabile se il movimento libero $x_{LIB}(t)$ tende a 0 $\forall x(0)$.

A è semplicemente stabile se $x_{LIB}(t)$ è limitato $\forall x(0)$ ma non tende a 0 per qualche $x(0)$.

A è instabile se $x_{LIB}(t)$ è illimitato per qualche $x(0)$.

A è instabile se $\exists \lambda_i : Re(\lambda_i) > 0$, oppure se $Re(\lambda_i) \leq 0 \ \forall i$ ma $\exists \lambda_i$ con $Re(\lambda_i) = 0$ che è radice multipla del polinomio minimo.

6) $$\dot{x}_1 = x_1(K - x_1) - x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -d x_2 + e x_1 x_2$$