POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
2° prova parziale, 29/6/2016

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

8	6	8	4	4	2

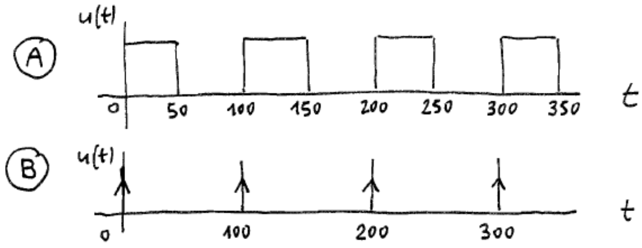
Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Un'apparecchiatura è sottoposta a prove sperimentali allo scopo di ricavarne la funzione di trasferimento $G(s)$. Applicando ingressi sinusoidali $u(t) = \sin(\omega t)$ di ampiezza unitaria e aventi varie frequenze ω ("prova in frequenza"), si è rilevata l'ampiezza dell'uscita a transitorio esaurito $y(t) = Y sin(\omega t + \varphi)$:

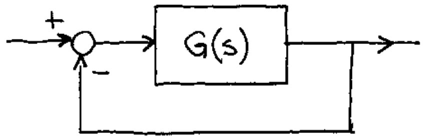
ω	0.01	10	1000
Y	1	10	0.1

Si è inoltre rilevato che lo sfasamento φ tende a $-\pi$ quando $\omega \to \infty$.
Applicando invece un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ ("prova statica"), l'uscita tende a zero qualunque sia il valore dell'ingresso.



a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con i risultati delle prove sperimentali.

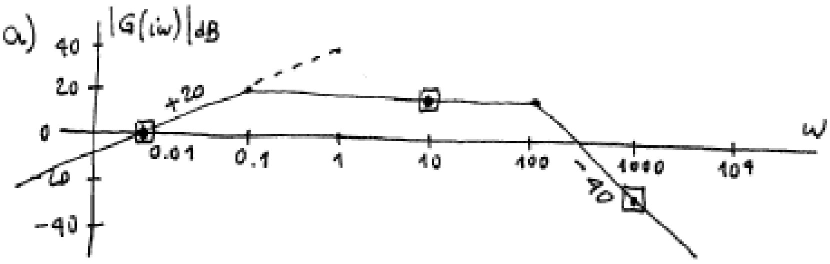
b) Determinare qualitativamente e rappresentare graficamente la risposta di $G(s)$ alle due funzioni di ingresso in figura.



c) Discutere, utilizzando un qualunque criterio formale (cioè non la sola calcolatrice), la stabilità del sistema retroazionato in figura.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a)



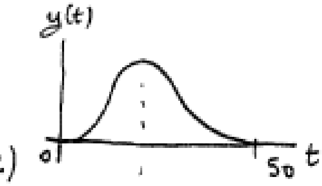
$$G(s) = 100\,s \,\frac{1}{(1+10s)(1+0.01s)^2}$$

Per $\omega \to \infty$, $\varphi \to \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{2} = -\pi$, ok.

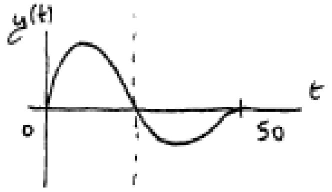
Per ingresso costante, $\bar{y} = G(0)\,\bar{u} = 0$, ok.

b) Risposta allo scalino di $G(s)$:

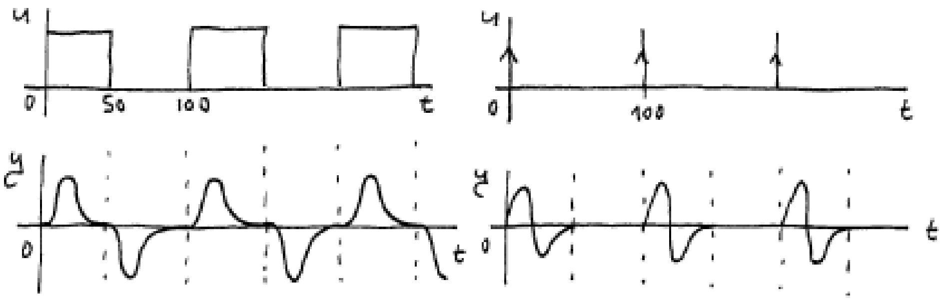
- asintot. stabile, $Re(p_i) < 0 \;\; \forall i$
- $T_R \simeq 5T_D = 50$
- $\bar{y} = 0$ (vedi sopra)
- $y(0) = 0 = \dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0) = 10^5 > 0$ $(r=2)$
- estremi: $1 \leq N \leq 1$



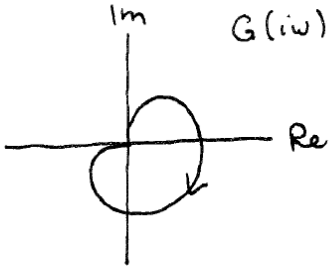
Risposta all'impulso di $G(s)$: ottenuta derivando la risposta allo scalino.



Quindi:



c) diagramma polare:



$N = 0$, $P = 0$, quindi, per il criterio di Nyquist, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

(In alternativa, si può utilizzare il criterio di ~~Nyquist~~ Hurwitz).

2) Il sistema a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$, $y(t) = cx(t)$, è descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Discutere la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema.
b) Progettare un controllore (legge di controllo + ricostruttore dello stato) in modo tale che il sistema controllato converga all'equilibrio in tempo finito.
c) Verificare se, con una retroazione statica dall'uscita ($u(t) = \alpha y(t)$, con α scalare diverso da zero), è possibile assegnare al sistema retroazionato autovalori arbitrari o, quantomeno, renderlo asintoticamente stabile.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $|tr(A)| > n \Rightarrow A$ instabile

$R = |b \quad Ab| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \det R \neq 0 \Rightarrow (A, b)$ compl. raggiungibile

$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \det \mathcal{O} \neq 0 \Rightarrow (A, c)$ compl. osservabile

b) Sia $(A+bk)$ che $(A+\ell c)$ devono avere autovalori tutti nulli.

$$A + bk = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} |k_1 \quad k_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ k_1 & k_2 - 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} tr(A+bk) = 0 = k_2 - 3 \\ \det(A+bk) = 0 = -2k_2 + 2 - k_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -4 \\ k_2 = 3 \end{cases}$$

$$A + \ell c = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{vmatrix} |1 \quad 0| = \begin{vmatrix} \ell_1 - 2 & 1 \\ \ell_2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} tr(A+\ell c) = 0 = \ell_1 - 3 \\ \det(A+\ell c) = 0 = -\ell_1 + 2 - \ell_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \ell_1 = 3 \\ \ell_2 = -1 \end{cases}$$

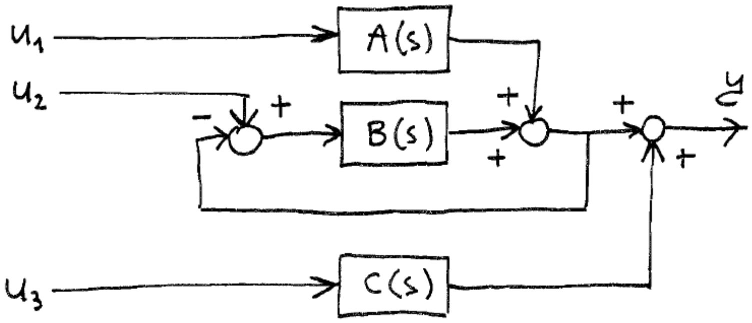
c) $x(t+1) = Ax(t) + b(\alpha c x(t)) = (A + \alpha bc)\, x(t)$

$$A + \alpha bc = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -1 \end{vmatrix}$$

$|tr(A)| > n$ qualunque sia α, quindi $(A + \alpha bc)$ è instabile $\forall \alpha$.

3) Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui i tre blocchi hanno funzione di trasferimento:

$$A(s) = \frac{1}{1+3s} \qquad B(s) = \frac{10}{s(1+s)} \qquad C(s) = 2\frac{(1-s)(1-2s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$$



a) Determinare la funzione di trasferimento tra ciascuno degli ingressi e l'uscita y, discutendone la stabilità.
b) Determinare qualitativamente, e rappresentare graficamente, l'andamento di $y(t)$ quando agli ingressi u_1, u_2, u_3 viene applicato uno scalino unitario agli istanti, rispettivamente, $t = 0,\ 20,\ 40$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $u_1 \to y$: $\quad y = Au_1 - By$
$(u_2 = u_3 = 0)$ $\quad y = \frac{A}{1+B} u_1$

$$F(s) = \frac{A}{1+B} = \frac{1}{1+3s} \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{s(1+s)}} = \frac{s(1+s)}{(1+3s)(s^2+s+10)}$$

poli: $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{39}}{2}$: asintoticamente stabile,
$T_R \simeq 5 \cdot 3 = 15$,
oscillazioni $\tau = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{39}}{2}} \simeq 2$

$u_2 \to y$: $\quad y = B(u_2 - y)$
$(u_1 = u_3 = 0)$ $\quad y = \frac{B}{1+B} u_2$

$$G(s) = \frac{B}{1+B} = \frac{\frac{10}{s(1+s)}}{1+\frac{10}{s(1+s)}} = \frac{10}{s^2+s+10}$$

poli: $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{39}}{2}$: asintoticamente stabile,
$T_R \simeq 5 \cdot 2 = 10$,
oscillazioni $\tau \simeq 2$

$u_3 \to y$: $\quad y = C u_3 \quad C(s) = 2\,\dfrac{(1-s)(1-2s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$

$(u_1 = u_2 = 0)$

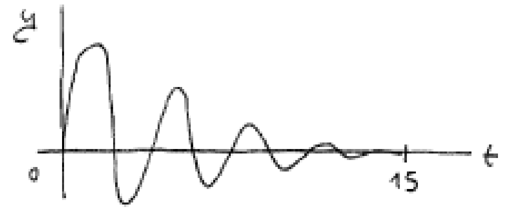
poli : $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$: asintoticamente stabile

$T_R \simeq 5 \cdot 3 = 15$

b) risp. scalino di $F(s)$:

$y_\infty = F(0) = 0$

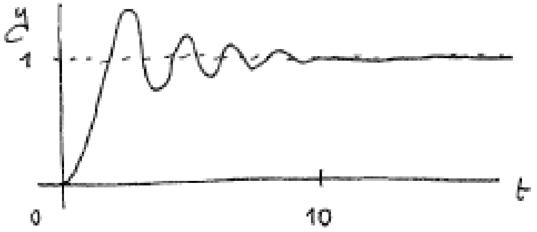
$(r=1)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{1}{3} > 0 \end{cases}$



risp. scalino di $G(s)$:

$y_\infty = G(0) = 1$

$(r=2)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = 10 > 0 \end{cases}$



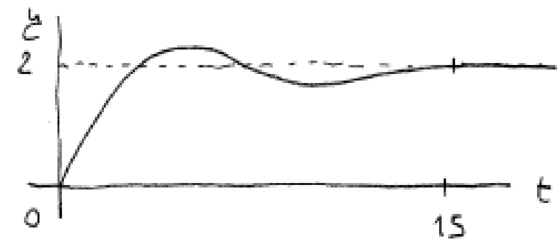
risp. scalino di $C(s)$

$y_\infty = C(0) = 2$

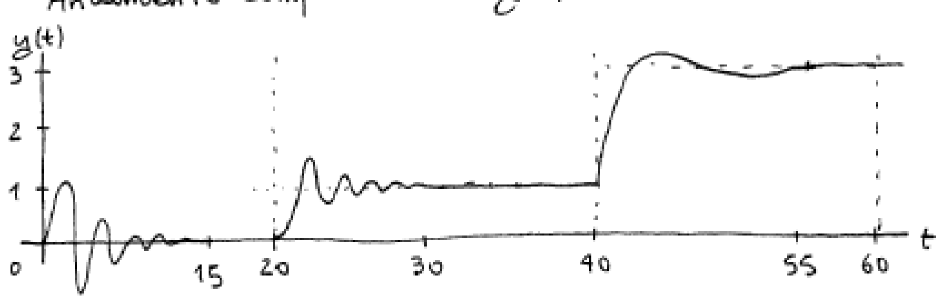
$(r=1)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{4}{6} > 0 \end{cases}$

$m_s = 2$

$N = 2$



Andamento complessivo di $y(t)$:



4) Dato un sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello $L(s)$, enunciare il criterio di stabilità di Bode.

5) Si fornisca la definizione di sistema stabilizzabile. Si precisi sotto quali condizioni un sistema è stabilizzabile.

6) Dopo aver avviato Matlab, specificare la sequenza di comandi da digitare per visualizzare la risposta allo scalino del sistema

$$G(s) = \frac{10(1-10s)}{(1+s)^2}$$

Risposte ai quesiti 4-5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

4)

Dato un sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello $L(s)$, supponiamo che:

1) tutti i poli di $L(s)$ hanno $Re(p_i) \leq 0$;
2) $\exists !\ \omega = \omega_c$ tale che $|L(i\omega)| = 1$;

Allora il sistema di controllo è asintoticamente stabile se e solo se

a) $\mu > 0$, dove μ è il guadagno generalizzato di $L(s)$

b) $\varphi_m > 0$, dove $\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi - |\measuredangle L(i\omega_c)|$

5) (A,b) è stabilizzabile se ammette una legge di controllo stabilizzante, cioè se esiste k tale che $(A+bk)$ è asintoticamente stabile.

(A,b) stabilizzabile se e solo se: i) è completamente raggiungibile, oppure ii) la parte non raggiungibile è asintoticamente stabile.

6)

$$G(s) = \frac{10(1-10s)}{(1+s)^2} = \frac{-100s+10}{s^2+2s+1}$$, quindi:

```
>> sis = tf([-100 10],[1 2 1])
>> step(sis)
```