POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 20/7/2016

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

								Voto totale
6	6	6	6	3	3	2		32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Una società di noleggio auto affitta vetture alle aziende con le formule del Noleggio di durata Mensile (NM) o Bimestrale (NB). All'inizio di ciascun mese t vengono date in affitto $u(t)$ vetture, di cui 2/3 con la formula NM e 1/3 con la formula NB. L'importo dell'affitto è riscosso posticipatamente: α euro al termine del noleggio NM, e β euro al termine di ciascun mese del noleggio NB.

a) Si descriva l'evoluzione nel tempo delle auto affittate mediante un sistema dinamico a tempo discreto, definendo come variabile di uscita $y(t)$ l'affitto complessivo riscosso all'istante t.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.
c) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
d) Determinare la dimensione del sottospazio di raggiungibilità e del sottospazio di non osservabilità del sistema.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $x_1(t)$ = n. auto in NM da 1 mese
$x_2(t)$ = " " NB da 1 mese
$x_3(t)$ = " " NB da 2 mesi

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{2}{3}u(t) \\ x_2(t+1) = \frac{1}{3}u(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \end{cases} \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \end{vmatrix}$$

$$y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \beta x_3(t)$$

b) $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, 3$
$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow$ A asintoticamente stabile
sistema a memoria finita (FIR) : $T_R \leq n = 3$
non vi sono aut. complessi o reali negativi
$\Rightarrow$ no oscillazioni

c) $\begin{cases} z x_1 = \frac{2}{3} u \\ z x_2 = \frac{1}{3} u \\ z x_3 = x_2 \end{cases} \implies \underset{\sim}{y} = \underbrace{\frac{z\left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta\right) + \frac{1}{3}\beta}{z^2}}_{G(z)} u$

$\underset{\sim}{y} = \alpha x_1 + \beta x_2 + \beta x_3$

d) $R = \begin{vmatrix} b & Ab & A^2 b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad \text{rank}(R) = 2$, $\dim X_R = 2$

$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad \text{rank}(\mathcal{O}) = 2$, $\dim X_{NO} = n - 2 = 1$

2) Si considerino i sistemi non lineari a tempo continuo (due sistemi, in base al segno $\pm$):

$$\dot{x} = \pm(p + x - x^3)$$

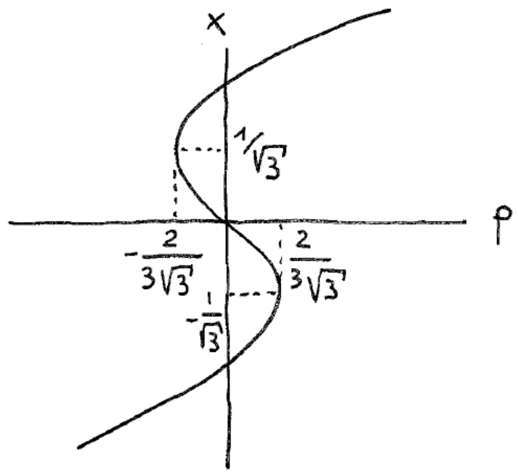
Per entrambi i sistemi:
a) Determinare gli stati di equilibrio per ogni $-\infty < p < +\infty$.
b) Discutere la stabilità di tutti gli equilibri.
c) Rappresentare graficamente equilibri e traiettorie nel piano (p, x).

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Per entrambi i sistemi gli equilibri sono dati da:

$p = -x + x^3$ (ottenuta ponendo $\dot{x} = 0$),

che corrispondono alla curva in figura:



b) caso $\oplus$: $J = 1 - 3x^2$

se $\bar{x} < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ o $\bar{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow J < 0 \Rightarrow \bar{x}$ asint. stabile

se $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \bar{x} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow J > 0 \Rightarrow \bar{x}$ instabile

se $\bar{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow J = 0$, la linearizzazione non dà informazioni, vedi p.to c).

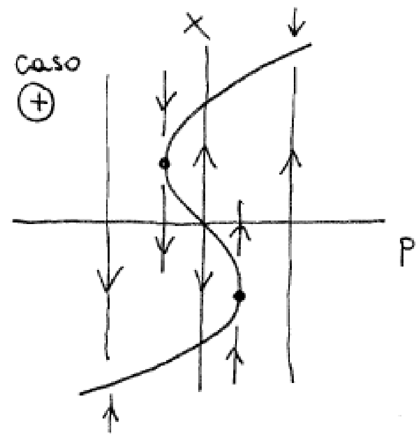
caso $\ominus$: $J = -1 + 3x^2$

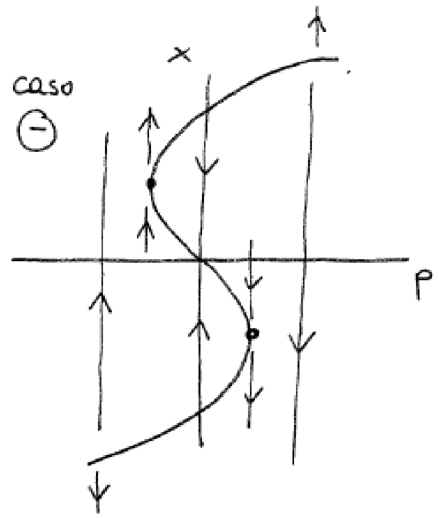
se $\bar{x} < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ o $\bar{x} > \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow J > 0 \Rightarrow \bar{x}$ instabile

se $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \bar{x} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow J < 0 \Rightarrow \bar{x}$ asint. stabile

se $\bar{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow J = 0$, ?

c)



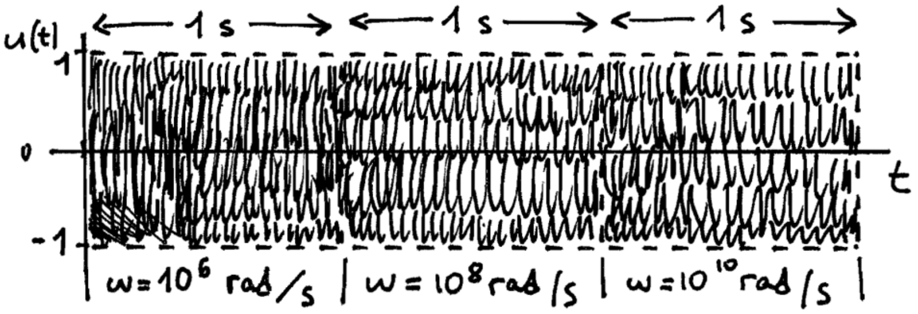


I punti di equilibrio con $\bar{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ sono instabili, poiché esistono traiettorie che, partendo arbitrariamente vicino all'equilibrio, si allontanano.

3) Un amplificatore a radio-frequenza ha funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10^7 s}{s^2 + 10^7 s + 10^{16}}$$

a) Discutere la stabilità del sistema, determinando in particolare il tempo di risposta.
b) Determinare qualitativamente e rappresentare graficamente la risposta allo scalino.
c) Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase.
d) All'amplificatore viene applicato il segnale $u(t)$ in figura, formato dalla concatenazione di tre sinusoidi di ampiezza 1 e di frequenza diversa (vedi figura), ciascuna per la durata di 1 secondo. Determinare (e rappresentare con un grafico analogo a quello in figura) il segnale di uscita $y(t)$.



Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $s = \frac{-10^7 \pm \sqrt{10^{14} - 4\cdot 10^{16}}}{2} \cong -\frac{1}{2}10^7 \pm i\,10^8$

$Re(p_i) = -\frac{10^7}{2} < 0 \quad \forall i \Rightarrow$ sist. esternamente stabile

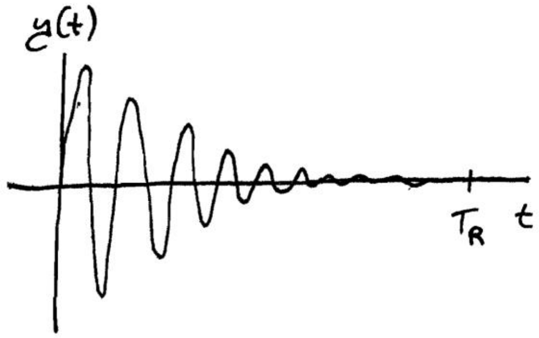
$T_R \simeq 5T_D = 5\cdot\frac{2}{10^7} = 10^{-6}$

b) $\bar{y} = G(0) = 0$, $T_R \simeq 10^{-6}$

$r = 1$: $y(0) = 0$

$\dot{y}(0) = 10^7 > 0$

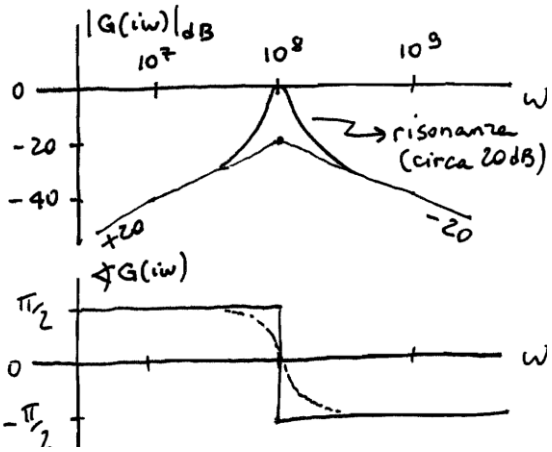
poli complessi $\Rightarrow$ oscillazioni di periodo $\tau = \frac{2\pi}{10^8} = 6.28\cdot 10^{-8}$



c) $G(s) = 10^{-9} s \dfrac{10^{16}}{\underbrace{s^2 + 10^7 s + 10^{16}}}$

$\omega_n = 10^8$

$\xi = 0.05$



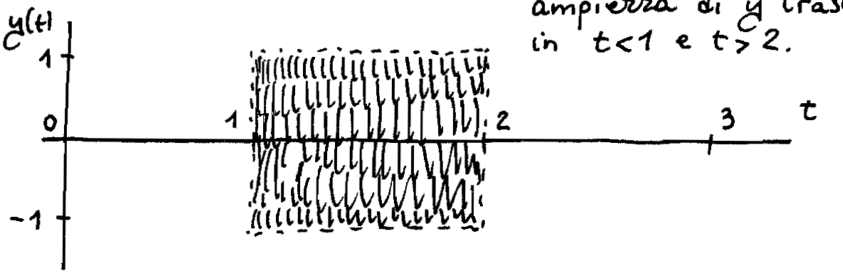
d) $y(t) = 1 \cdot |G(i\omega)| \sin(\omega t + \measuredangle G(i\omega))$

$\omega = 10^6 : \quad |G(i\omega)| = 0.001$

$\omega = 10^8 : \quad |G(i\omega)| = 1$

$\omega = 10^{10} : \quad |G(i\omega)| = 0.001$

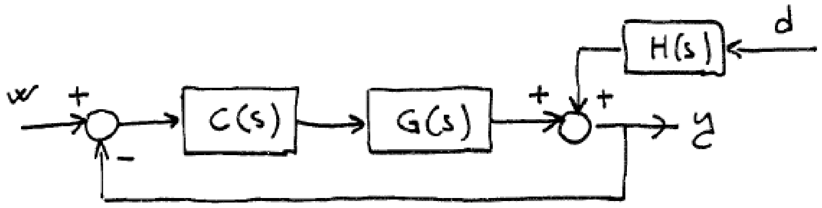
ampiezza di y trascurabile in $t<1$ e $t>2$.



4) Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui $C(s) = \rho$ (costante) e

$$G(s) = \frac{1000(100 - s)}{s(100 + s)}$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + 10s}$$



a) Mediante il criterio di Bode, discutere la stabilità del sistema di controllo per $\rho = 1$, tracciando inoltre il diagramma polare (qualitativo) della funzione di trasferimento d'anello (evidenziare il punto -1).
b) Determinare un valore di ρ che renda il sistema di controllo asintoticamente stabile con margine di fase di circa 90 gradi.
c) Determinare, in modo approssimato, la banda passante ed il tempo di risposta del sistema di controllo progettato al punto b.
d) Determinare l'errore a transitorio esaurito dovuto al disturbo

$$d(t) = 10 + \sin(t)$$

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

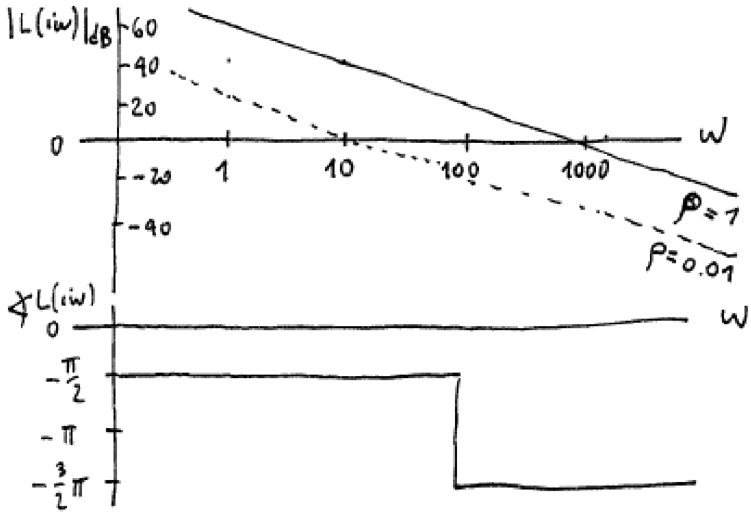
a) $L(s) = 1000\rho \dfrac{(1 - 0.01s)}{s(1 + 0.01s)}$

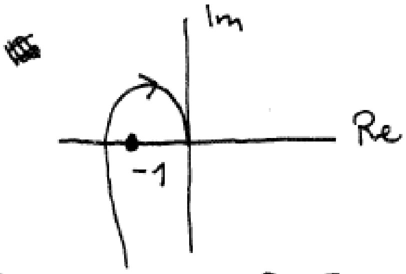
Criterio di Bode applicabile poiché:
* $L(s)$ non ha poli con $Re(p) > 0$
* $|L(i\omega)| = 1$ in una e una sola ω

Con $\rho = 1 \Rightarrow \omega_c = 1000$

$\varphi_m \simeq -\frac{\pi}{2} < 0$

Sist. di controllo INSTABILE.





b) Con $\rho = 0.01 \Rightarrow \omega_c = 10$, $\varphi_m = \frac{\pi}{2} > 0$, ASINT. STABILE.

c) $BP = (0, \omega_c) = (0, 10)$, $T_R \simeq \frac{5}{\omega_c} = 0.5$

d) All'uscita del blocco $H(s)$ il segnale vale

$$v(t) = 10 \cdot H(0) + \left| \frac{1}{1+10i} \right| \sin(t+\varphi) = 10 + 0.1 \sin(t+\varphi)$$

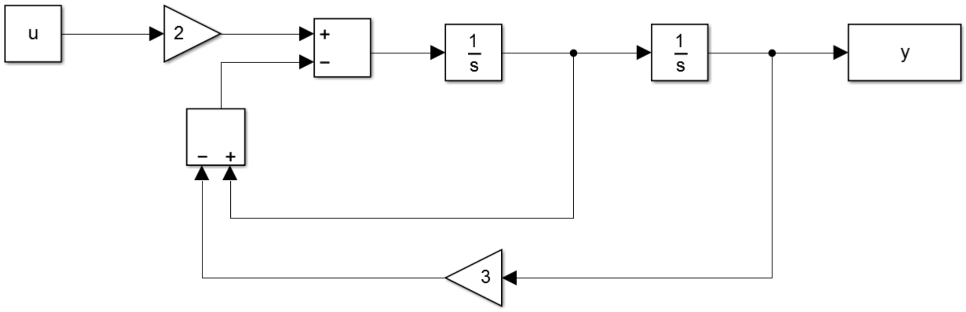
Poichè $L(s)$ è di tipo 1, l'effetto sull'errore della componente costante è nullo. Poichè la componente sinusoidale ($w=1$) è interna alla banda passante, l'effetto sull'errore sarà circa $\frac{1}{|L(i1)|} \simeq 0.1$, per cui:

$$e(t) = 0.01 \sin(t+\varphi)$$

5) Si consideri un sistema $\dot{x} = Ax$ di ordine $n = 2$. Quali informazioni, riguardanti le proprietà di stabilità del sistema, si possono dedurre dalla sola conoscenza del segno (o del valore nullo) di traccia e determinante di A ?

6) Enunciare la definizione di sistema esternamente stabile; specificare le implicazioni esistenti tra stabilità asintotica ed esterna.

7) Scrivere il modello ingresso/uscita (sia in forma di equazione differenziale che di funzione di trasferimento) corrispondente allo schema Simulink sotto riportato.



Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

5)

Poiché $\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2$ e $\det A = \lambda_1 \lambda_2$, ne consegue:

	$\det A < 0$	$\det A = 0$	$\det A > 0$
$\mathrm{tr}A < 0$	$\exists \lambda_i$ con $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ $\Downarrow$ A INSTABILE (selle)	$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$, A SEMPL. ST.	A ASINT. ST.
$\mathrm{tr}A = 0$		$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, A SEMPL. ST. o DEB.-INST.	$\lambda_1, \lambda_2 = \pm ib$, A SEMPL. ST
$\mathrm{tr}A > 0$		$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, A INSTAB.	A INSTABILE

6)

Σ si dice ESTERNAMENTE STABILE se, con $x(0) = 0$, l'uscita $y(t)$ è limitata per ogni ingresso $u(t)$ limitato.

Per qualunque sistema Σ:

$$\Sigma \text{ asint. stabile} \Rightarrow \Sigma \text{ est. stabile}$$

Se Σ è completamente raggiungibile e osservabile:

$$\Sigma \text{ asint. stabile} \Leftrightarrow \Sigma \text{ est. stabile}$$

7)

$$\ddot{y} + \dot{y} - 3y = 2u$$

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + s - 3}$$