POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 21/9/2016

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

6	6	6	6	3	3	2		Voto totale 32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)
Un fondo previdenziale suddivide i propri aderenti in tre classi, in base alla loro età: (1) da 20 a 40 anni, (2) da 40 a 60 anni, (3) oltre 60 anni. Gli aderenti di classe (1) e (2) versano ogni anno al fondo, rispettivamente, 2000 e 3000 euro, mentre quelli di classe (3) percepiscono dal fondo β euro all'anno. Ogni anno, una certa frazione α_{ij} di aderenti di classe *i* passa, per ragioni anagrafiche, alla classe *j* (α_{ii} è quindi la frazione che rimane nella classe *i*). I coefficienti α_{ij} sono riportati nella tabella seguente.

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Infine, ogni anno il fondo recluta un certo numero di nuovi aderenti, esclusivamente di classe (1).

a) Descrivere l'evoluzione nel tempo della popolazione degli aderenti al fondo previdenziale mediante un sistema a tempo discreto, in cui *u*(*t*) sia il numero di nuovi aderenti nell'anno *t* e *y*(*t*) sia il numero complessivo di aderenti al fondo.
b) Studiare la stabilità del sistema dinamico proposto al punto a).
c) Determinare, per ciascuna classe anagrafica, il numero di aderenti al fondo nel lungo periodo, nell'ipotesi che il numero di nuovi aderenti sia pari a 1000 ogni anno.
d) Aggiungere al modello un'ulteriore equazione di stato, la quale rappresenti l'evoluzione nel tempo della cassa del fondo previdenziale (nell'ipotesi che il capitale in cassa ad inizio anno benefici di un interesse bancario del 5%).
e) Determinare la quota β erogabile annualmente agli aderenti di classe (3) nell'ipotesi che la popolazione sia nelle condizioni di equilibrio determinate al punto c), e si voglia mantenere costante la cassa del fondo previdenziale al valore di 1.000.000 euro.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_i(t)$ = n. aderenti di classe i nell'anno t, $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= 0.9x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) &= 0.05x_1(t) + 0.8x_2(t) \\ x_3(t+1) &= 0.1x_2(t) + 0.6x_3(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) A è triangolare : $\sigma(A) = \{0.9, 0.8, 0.6\}$

$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow$ A è ASINTOTICAMENTE STABILE

c) calcolo lo stato di equilibrio:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 0.9\bar{x}_1 + 1000 \\ \bar{x}_2 &= 0.05\bar{x}_1 + 0.8\bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 &= 0.1\bar{x}_2 + 0.6\bar{x}_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 10'000 \\ 2'500 \\ 625 \end{vmatrix}$$

d) $x_4(t)$ = capitale della cassa previdenziale all'inizio anno t

$$x_4(t+1) = 1.05\,x_4(t) + 2000\,x_1(t) + 3000\,x_2(t) - \beta x_3(t)$$

e) Impongo $x_4(t+1) = x_4(t) = 10^6$ e $|x_1\ x_2\ x_3| = |\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3|$:

$$10^6 = 1.05 \cdot 10^6 + 2000 \cdot 10^4 + 3000 \cdot 2500 - \beta \cdot 625$$

$$\Rightarrow \beta = 44'080$$

2)

Nel seguente sistema a tempo continuo di ordine 1, $x(t)$ rappresenta la frazione (rispetto al totale della popolazione) di acquirenti di un certo prodotto ($0 \le x(t) \le 1$). La creazione di nuovi acquirenti avviene per "contagio" (passa-parola) tra gli acquirenti x e i non acquirenti $(1-x)$.

$$\dot{x} = -x + px(1-x)$$

a) Determinare, per tutti i $p > 0$, gli stati di equilibrio del sistema e rappresentarli in un piano (p, x).
b) Discutere, per tutti i $p > 0$, la stabilità degli stati di equilibrio determinati al punto a).

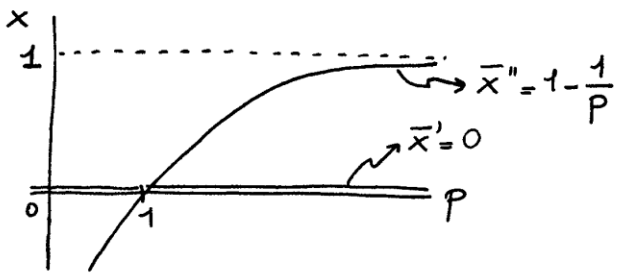
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) calcolo equilibri:

$\dot{x} = 0 \Rightarrow -x + px(1-x) = 0$

$\hookrightarrow \bar{x}' = 0$

$-1 + p(1-x) = 0 \rightarrow \bar{x}'' = 1 - \frac{1}{p}$, $\bar{x}'' > 0$ se $p > 1$



b) Jacobiano: $J = \frac{\partial f}{\partial x} = -1 + p - 2px$

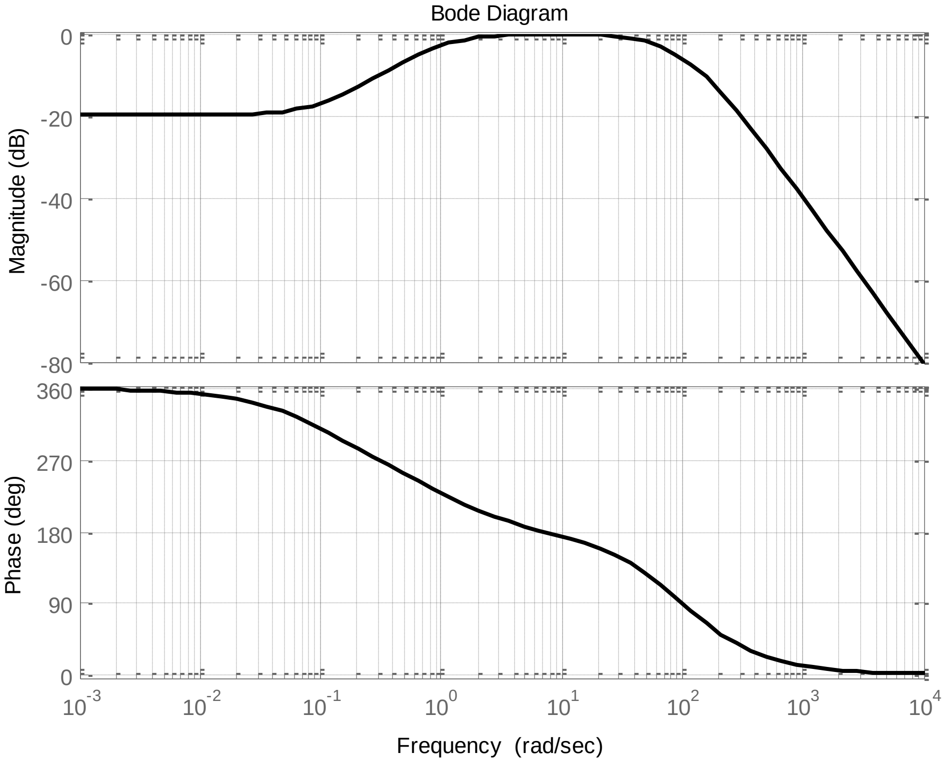
$J|_{\bar{x}'=0} = -1 + p$, asint. stabile se $p < 1$, instabile se $p > 1$

$J|_{\bar{x}''=1-\frac{1}{p}} = 1 - p$, instabile se $p < 1$, asint. stabile se $p > 1$

Per $p = 1$: $\bar{x}' = \bar{x}'' = 0$, ma $J|_{\bar{x}'} = J|_{\bar{x}''} = 0$ non permette di discutere la stabilità;

Per $p = 1$ il sistema diventa: $\dot{x} = -x^2$, quindi $x \rightarrow 0$ se $x(0) > 0$ ma $x \rightarrow -\infty$ se $x(0) < 0 \Rightarrow$ $\bar{x}$ è instabile.

3)
Mediante esperimenti su un circuito elettrico si sono ricavati i seguenti diagrammi di Bode del modulo e della fase (nota bene: la scala usata per la fase è del tutto equivalente a quella usuale: 360°=0°, 270°= - 90°, …).



a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con i diagrammi di Bode.
b) Determinare, ricavando dai diagrammi di Bode le informazioni necessarie, l'uscita a transitorio esaurito quando

$$u(t) = -10 + \sin(0.3t) + \sin\left(100t - \frac{\pi}{8}\right)$$

c) Determinare, in modo qualitativo, la risposta allo scalino e la risposta all'impulso, discutendo anche il tempo di risposta del sistema.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $0.1 \dfrac{(1-10s)}{(1+s)(1+0.01s)^2} = G(s)$, esternamente stabile

b) $y(t) = -10 \cdot G(0) + \left| G(i0.3) \right| \sin\left(0.3t + \measuredangle G(i0.3)\right)$

$+ \left| G(i100) \right| \sin\left(100t - \frac{\pi}{8} + \measuredangle G(i100)\right) =$

$= -1 + \underbrace{0.316}_{\simeq 10dB} \sin\left(0.3t - \frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{0.501}_{\simeq -6dB} \sin\left(100t - \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}\pi\right)$

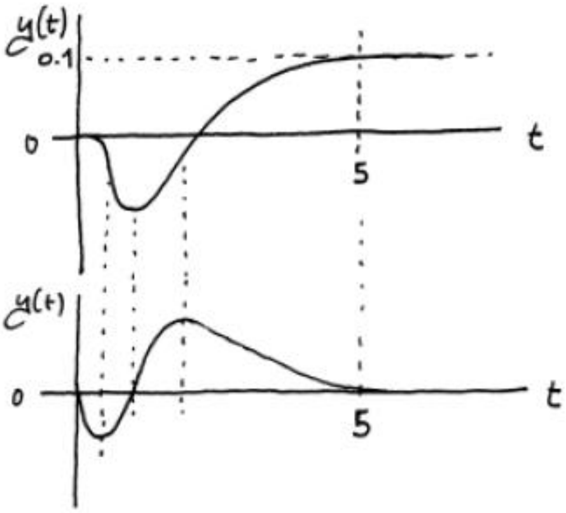
c) $u(t) = sca(t)$

$r = 2 \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$

$\ddot{y}(0) = -\frac{1}{10^{-4}} = -10^4 < 0$

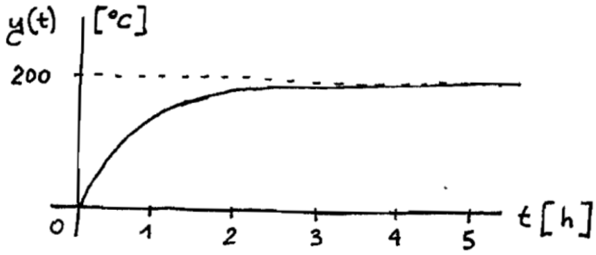
$y_\infty = G(0) = 0.1$

$T_R \simeq 5T_d = 5$



risposta all'impulso, ottenuta graficamente per derivazione

4)
Ad un forno industriale inizialmente spento e a temperatura ambiente (0 [°C], per semplicità) è stato applicato uno scalino di potenza riscaldante pari a $u(t) = 20000$ [W]. L'andamento registrato della temperatura $y(t)$ all'interno del forno è riportato in figura.



a) Determinare la funzione di trasferimento del forno.
b) Progettare un controllore che: garantisca l'asintotica stabilità del sistema di controllo; ottenga errore a regime nullo a fronte di ingressi costanti; porti il sistema a regime in non più di 5 [h].
c) Il forno funziona con continuità 24 ore su 24 ed è collocato in ambiente aperto. Ipotizzando che la temperatura ambiente sia modellizzabile come un disturbo additivo in uscita che varia in modo sinusoidale, studiare l'effetto di un'escursione giorno/notte da +10 [°C] a -10 [°C].

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

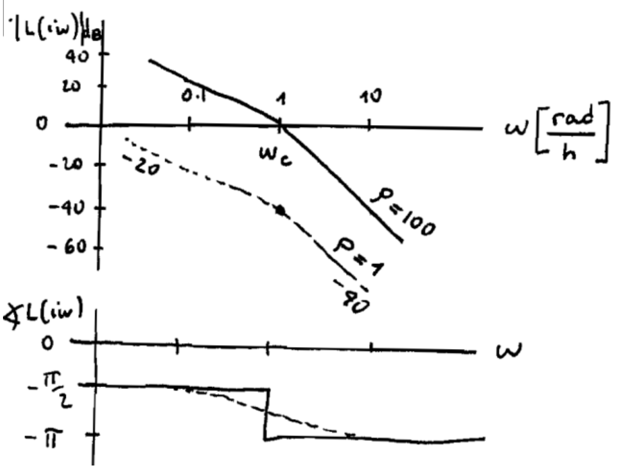
a) La risposta è esponenziale, con costante di tempo $T \simeq 1$.

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{200}{20000} = 0.01 \quad ; \quad G(s) = \frac{0.01}{1+s}.$$

b) Il controllore più semplice è $C(s) = \rho/s$, di tipo 1 per avere errore nullo a regime.

$$L(s) = \frac{0.01\,\rho}{s} \cdot \frac{1}{1+s}$$

E' richiesto $T_R = 5$, quindi $\omega_c \simeq \frac{5}{T_R} = 1$.



Posto $\rho = 100$, otteniamo $\omega_c = 1$, $\varphi_c \simeq -135°$
$\Rightarrow \varphi_m = 45°$
(asint. stabilità del sistema di controllo).

c) Disturbo additivo in uscita :

$$d(t) = 10 \sin(\omega t) \quad , \quad \text{con } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} \cong 0.26 \left[\frac{rad}{h}\right]$$

$$e_d = -\frac{1}{1+L} d \implies e_d(t) = 10 \cdot \left| \frac{1}{1+L(i0.26)} \right| \sin(0.26t + \varphi)$$

$$\underset{\text{entro la banda passante}}{\cong} 10 \frac{1}{|L(i0.26)|} \sin(0.26t + \varphi)$$

$$\simeq 2.7 \sin(0.26t + \varphi)$$

$\pm 2.7 [°C]$ di errore massimo

5) Un sistema a tempo continuo asintoticamente stabile, completamente raggiungibile e osservabile, è sottoposto all'ingresso $u(t) = \sin(t) - 10\sin(2t)$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire (motivando sinteticamente) se è vera o falsa:

a) L'uscita $y(t)$ è limitata, qualunque sia lo stato iniziale.
b) A transitorio esaurito l'uscita $y(t)$ è sinusoidale.
c) A transitorio esaurito l'uscita $y(t)$ è periodica.

6) Enunciare le definizioni di stato raggiungibile, di insieme di raggiungibilità e di sistema completamente raggiungibile.

7) In Matlab, si vuole tracciare il grafico della risposta all'impulso del sistema definito da

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Qual è la sequenza di comandi da digitare?

Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire sul retro]:

5)

4) a) VERA. Poiché è asintoticamente stabile, il sistema è anche esternamente stabile. Quindi il movimento forzato è limitato poiché l'ingresso è tale, il movimento libero tende a 0 per l'asintotica stabilità.

b) FALSA. Per il Teorema della risposta in frequenza, sarà una combinazione lineare di 2 sinusoidi di diversa frequenza ($w = 1$ e 2).

c) VERO. La combinazione lineare di 2 sinusoidi di periodo intero è periodica (il periodo è il m.c.m. dei due periodi).

6)

$\tilde{x}$ è uno stato raggiungibile se esiste un istante $T \geq 0$ e una funzione d'ingresso $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, tale che, partendo da $x(0) = 0$, risulta $x(T) = \tilde{x}$.

L'insieme di raggiungibilità $\underline{X}$ è l'insieme degli stati $\tilde{x}$ raggiungibili.

Un sistema è completamente raggiungibile se $\underline{X} = \mathbb{R}^n$, cioè se l'insieme di raggiungibilità coincide con lo spazio di stato.

7)

```
>> A = [-1 2 ; 0 -2] ;
>> b = [0 ; 1] ;
>> c = [1 0] ;
>> sis = ss(A, b, c, 0) ;
>> impulse (sis)
```