POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 8/2/2017

COGNOME:_______________________ NOME: _______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: _________________________

FIRMA: ______________________________________ Visto del docente:______

6	6	6	6	3	3	2		Voto totale 32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)

In un’azienda manifatturiera, la produzione è ripartita su un elevato numero di macchine tra loro uguali. Sono note le probabilità che una macchina incorra in un guasto nel corso di un anno, in relazione alla sua età.

età	da 0 a 1 anno	da 1 a 2 anni	da 2 a 3 anni	da 3 a 4 anni
Prob. guasto	0	0.1	0.2	0.3

In caso di guasto, la macchina viene eliminata poiché la riparazione non è conveniente. Ogni macchina viene comunque eliminata al compimento del quarto anno di attività, in quanto obsoleta.

a) Descrivere l’evoluzione nel tempo dell’insieme delle macchine mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui $u(t)$ indichi il numero di nuove macchine acquistate e $y(t)$ il totale di macchine in servizio.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l’eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.
c) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
d) Si ipotizzi ora che l’attività di ciascuna macchina frutti un profitto annuo p e che il costo per l’acquisto di una nuova macchina sia c. Modificare il modello precedente, assumendo che l’azienda spenda ogni anno per l’acquisto di nuovi macchinari esattamente la frazione $0 < \alpha < 1$ del profitto ottenuto.
e) Studiare la stabilità del sistema ottenuto al punto c), ponendo $c = p$ e $\alpha = 0.1$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Traccia della soluzione:

a) $x_i(t)$, $i=1,2,3,4$: n° macchine in servizio da i anni all'istante t

$$x_1(t+1) = (1-g_1)u(t) = u(t)$$
$$x_2(t+1) = (1-g_2)x_1(t) = 0.9x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = (1-g_3)x_2(t) = 0.8x_2(t)$$
$$x_4(t+1) = (1-g_4)x_3(t) = 0.7x_3(t)$$

$\hookrightarrow$ prob. guasto

$$y(t) = x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)$$

b) $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{vmatrix}$ $\sigma(A) = \{0,0,0,0\}$ $|\lambda_i|<1 \ \forall i$ $\Rightarrow$ ASINTOT. STABILE

sistema a memoria finita : $T_R \leq n = 4$

λ_i reali non negativi $\Rightarrow \nexists$ oscillazioni.

c) $$\left.\begin{array}{l} zx_1 = u \\ zx_2 = 0.9x_1 \\ zx_3 = 0.8x_2 \\ zx_4 = 0.7x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \left[\frac{1}{z} + \frac{0.9}{z^2} + \frac{0.9\times 0.8}{z^3} + \frac{0.9\times 0.8\times 0.7}{z^4}\right] u$$

$$G(z) = \frac{z^3+0.9z^2+0.72z+0.504}{z^4}$$

d) Cambia solo la 1ª equazione:

$$x_1(t+1) = (1-g_1)\alpha\frac{P}{C}\left(x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)\right)$$

e) $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$

A è una matrice NON NEGATIVA.

λ_D = aut. dominante è REALE ≥ 0

$$0.4 \leq \lambda_D \leq 0.9$$

min e max somma di riga

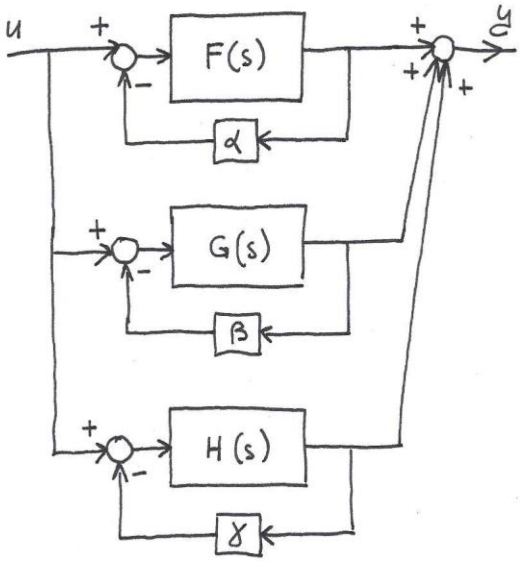
$\lambda_D < 1 \Rightarrow$ ASINT. STABILE

2)

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui

$$F(s) = \frac{1}{s-1} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2+2s-2} \qquad H(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s-1}$$

mentre α, β, γ sono coefficienti reali.



a) Determinare, motivando adeguatamente la risposta, per quali valori della terna (α, β, γ) il sistema in figura è asintoticamente stabile.

b) Determinare la funzione di trasferimento complessiva del sistema, esprimendola in funzione di $F, G, H, \alpha, \beta, \gamma$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Indichiamo con: R_F la retroazione di $F(s)$ con α ;
R_G " " $G(s)$ " β ;
R_H " " $H(s)$ " γ .

Allora i sistemi R_F, R_G, R_H sono connessi in PARALLELO. $\Longrightarrow$
Il sistema aggregato sarà asintoticamente stabile se e solo se lo sono R_F, R_G, R_H.

$$R_F = \frac{F}{1+\alpha F} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{\alpha}{s-1}} = \frac{1}{s-1+\alpha} \qquad \text{as. st.} \Longleftrightarrow \alpha > 1$$

$$R_G = \frac{G}{1+\beta G} = \frac{1}{s^2+2s-2+\beta} \qquad \text{as. st.} \Longleftrightarrow \beta > 2$$

$$R_H = \frac{H}{1+\gamma H} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s-1+\gamma} \qquad \text{as. st.} \underset{\text{(Hurwitz)}}{\Longleftrightarrow} \begin{matrix} -1+\gamma > 0 \\ 2 \cdot 2 > -1+\gamma \end{matrix}$$

quindi $1 < \gamma < 5$

In definitiva, il sistema aggregato è as. stab. $\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \beta > 2 \\ 1 < \gamma < 5 \end{cases}$

b) $$R_{TOT} = R_F + R_G + R_H = \frac{F}{1+\alpha F} + \frac{G}{1+\beta G} + \frac{H}{1+\gamma H}$$

3)
Un sistema meccanico è descritto dal seguente modello di stato, in cui (x_1, x_2) rappresentano, rispettivamente posizione e velocità.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u$$
$$y = x_1$$

a) Studiare la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema.
b) Progettare un ricostruttore dello stato il cui errore di stima si annulli in circa 0.1 secondi.
c) Progettare una legge di controllo che porti il sistema a regime in circa 1 secondo.
d) Verificare se è possibile controllare il sistema con una retroazione diretta (statica) dall'uscita, cioè $u = ky$, verificando se esistono valori di k per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) $\left.\begin{matrix} \mathrm{tr} A = -1 < 0 \\ \det A = 1 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A$ asint. stabile

$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \det R \neq 0 \Rightarrow (A, b)$ compl. ragg.

$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \det \mathcal{O} \neq 0 \Rightarrow (A, c)$ compl. oss.

b) $A + \ell c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_1 & 1 \\ \ell_2 - 1 & -1 \end{vmatrix}$

$T_R(A + \ell c) = 0.1 \Rightarrow T_D(A + \ell c) = \frac{0.1}{5} = 0.02 \Rightarrow \lambda_D = -50$

$\left.\begin{matrix} \mathrm{tr}(A + \ell c) = \ell_1 - 1 = -100 \\ \det(A + \ell c) = -\ell_1 - \ell_2 + 1 = 2500 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \ell_1 = -99 \\ \ell_2 = -2400 \end{matrix}$

c) $A + bk = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k_1 - 1 & k_2 - 1 \end{vmatrix}$

$T_R(A + bk) = 1 \Rightarrow T_D(A + bk) = \frac{1}{5} = 0.2 \Rightarrow \lambda_D = -5$

$\left.\begin{matrix} \mathrm{tr}(A + bk) = k_2 - 1 = -10 \\ \det(A + bk) = 1 - k_1 = 25 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = -24 \\ k_2 = -9 \end{matrix}$

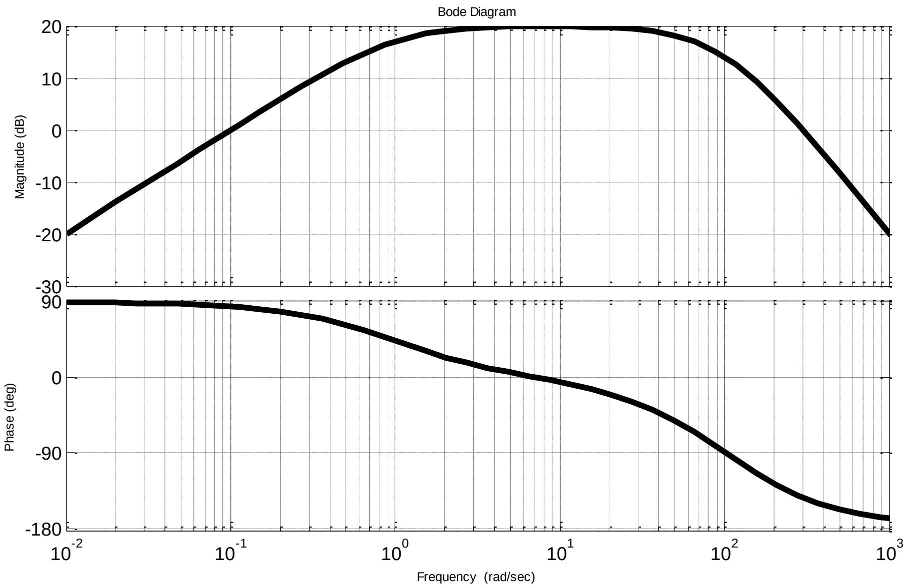
d) $\dot{x} = Ax + bu = Ax + bk\underset{c}{y} = Ax + bkcx = (A + bkc)x$

$A + bkc = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k - 1 & -1 \end{vmatrix}$

$\mathrm{tr}(A + bkc) = -1 < 0$
$\det(A + bkc) = 1 - k$, > 0 se e solo se $1 > k > -\infty$
Quindi $(A + bkc)$ asint. stab. $\Leftrightarrow k < 1$

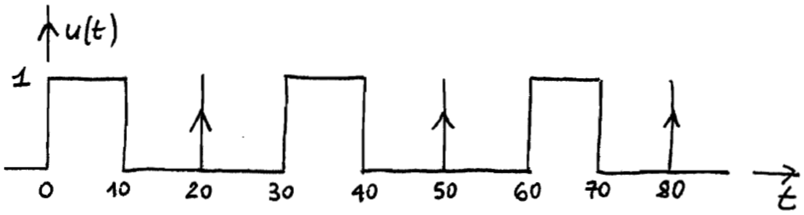
4)

Mediante una serie di esperimenti su un sistema lineare a tempo continuo, asintoticamente stabile, si sono ricavati i diagrammi di Bode (modulo e fase) riportati in figura.



a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con i risultati degli esperimenti.

b) Determinare (in modo qualitativo) la risposta del sistema all'ingresso rappresentato nella figura seguente (la linea verticale con freccia simboleggia un impulso unitario).



Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $G(s) = 10s \dfrac{1}{(1+s)(1+0.01s)^2}$

b) RISPOSTA ALLO SCALINO

sistema asintoticamente stabile:

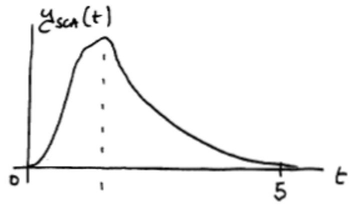
$y(\infty) = 1 \cdot G(0) = 0$

$r = 2$: $y(0) = \dot{y}(0) = 0$

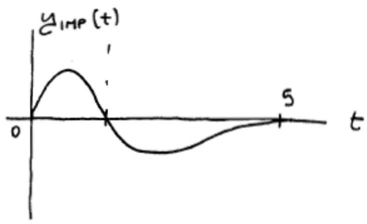
$\ddot{y}(0) = \dfrac{10}{10^{-4}} > 0$

estremi: $N = 1$

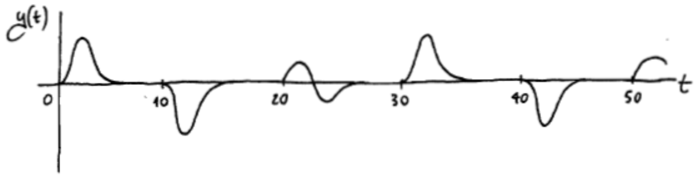
$T_R \cong 5T_D = 5$, no oscillazioni



Traccio la RISPOSTA ALL'IMPULSO derivando (graficamente) la $y_{sca}(t)$.



Combinando i risultati:



5) Con riferimento a un sistema lineare a tempo discreto, definire il guadagno, fornire la sua espressione in funzione di $(\mathrm{A}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d})$, discutere in quali casi non è ben definito.

6) Dato un sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello $\mathrm{L}(s)$, enunciare il criterio di stabilità di Bode.

7) Stai studiando, con l'aiuto di Matlab, il sistema definito dalle matrici (A, b). Hai digitato i comandi

```
>> A=[10 5; 0 –2];
>> b=[0; 1];
>> det(ctrb(A,b))
```

e ottieni come risultato

-5

Quale conclusione puoi trarre?

Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire sul retro]:

5) Il guadagno μ è il rapporto uscita/ingresso all'equilibrio, quindi $\mu = \bar{y}/\bar{u}$. E' ben definito se e solo se $\det(I-A) \neq 0$, poiché in tal caso $\bar{y} = (c(I-A)^{-1}b + d)\bar{u} = \mu\bar{u}$.

6) Scrivendo $L(s) = \dfrac{\mu}{s^h} \dfrac{\prod(1+s\tau_i)}{\prod(1+sT_i)}$, il criterio è applicabile quando i) $T_i > 0 \ \forall i$

ii) $|L(i\omega)| = 1$ ha una e una sola soluzione $\omega = \omega_c$.

In tal caso, il sistema di controllo è asintoticamente stabile se e solo se:

1) $\mu > 0$

2) $\varphi_m > 0$, dove $\varphi_m = \pi - \arg L(i\omega_c)$

7) ctrb(A,b) dà come risultato la matrice di raggiungibilità. Poiché il suo determinante risulta $\neq 0$ (-5), il sistema (A,b) è completamente raggiungibile.