POLITECNICO

MILANO 1863

copia con soluzione

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi

1° prova parziale, 4/5/2017

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ______________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

7	8	7	4	4	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

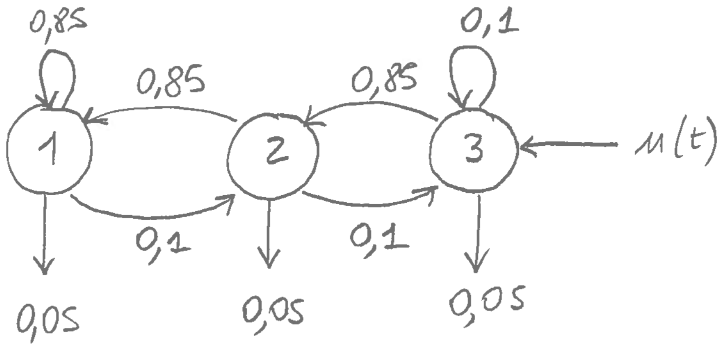
1) Gli abbonati a un servizio di "car sharing" sono suddivisi in tre categorie a cui corrispondono diverse tariffe di abbonamento, crescenti dalla cat. 1 alla cat. 3. Il gestore vuole incentivare l'uso moderato dei veicoli, per cui a fine anno promuove alla categoria inferiore (da 3 a 2, o da 2 a 1) l'utente che nell'anno non abbia superato una certa soglia di utilizzo, mentre declassa alla categoria superiore (da 1 a 2, o da 2 a 3) l'utente sopra soglia. Tutti i nuovi abbonati sono comunque inseriti in cat. 3.

In base alle statistiche di utilizzo degli ultimi anni, è noto che il 10% degli utenti di ogni categoria ha un utilizzo sopra soglia. Inoltre, un ulteriore 5% non rinnova l'abbonamento a fine anno e lascia il servizio.

a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema dinamico, nel quale l'ingresso rappresenti il numero di nuovi abbonati e l'uscita il numero di abbonati di cat. 1.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta.
c) Determinare lo stato di equilibrio corrispondente a 1000 nuovi abbonati all'anno.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a)



$x_i(t) = \#$ abbonati in categoria i $(i = 1,2,3)$ nell'anno t

$$x_1(t+1) = 0{,}85\, x_1(t) + 0{,}85\, x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t) + 0{,}85\, x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}1\, x_2(t) + 0{,}1\, x_3(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

b) $$A = \begin{vmatrix} 0{,}85 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}85 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{vmatrix}$$

Il sistema è positivo

Tutte le colonne sommano a $0{,}95 \Rightarrow \lambda_D = 0{,}95$ e il sistema è A. S.

$$T_R = -\frac{5}{\ln(0{,}95)} \simeq 95{,}5 \text{ anni}$$

c) $x_1 = 0{,}85\, x_1 + 0{,}85\, x_2 \rightarrow x_1 = 5{,}67\, x_2$

$x_2 = 0{,}1\, x_1 + 0{,}85\, x_3 \longrightarrow x_2 = 0{,}567\, x_2 + 0{,}85\, x_3 \rightarrow x_2 = 1{,}96\, x_3$

$x_3 = 0{,}1\, x_2 + 0{,}1\, x_3 + u \rightarrow x_3 = 0{,}196\, x_3 + 0{,}1\, x_3 + u$

$\hookrightarrow x_3 = 1{,}42\, u$

$\bar{u} = 1000$

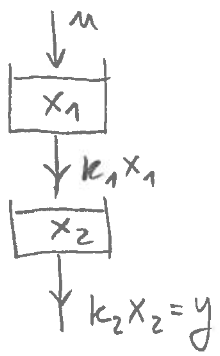
$$\bar{X} = \begin{vmatrix} 15\,781 \\ 2783 \\ 1420 \end{vmatrix}$$

2) Due serbatoi in cascata hanno coefficienti di scarico pari rispettivamente a k_1 (serbatoio di monte) e k_2 (serbatoio di valle). Nel serbatoio di monte entra una portata pari a u.

a) Descrivere il sistema mediante un modello a tempo continuo in cui l'uscita rappresenti la portata uscente dal serbatoio di valle, discutendo inoltre la stabilità del sistema.
b) Supponendo inizialmente vuoti i due serbatoi, tracciare nel piano di stato la traiettoria corrispondente al riempimento fino allo stato di equilibrio corrispondente a $u = 1$, nei due casi $(k_1 = 1, k_2 = 2)$ e $(k_1 = 2, k_2 = 1)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a)



$x_i(t)$ = volume di invaso del serbatoio i $(i = 1,2)$

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2$$
$$y = k_2 x_2$$

$$A = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{vmatrix} \qquad \lambda_1 = -k_1 \qquad \lambda_2 = -k_2$$

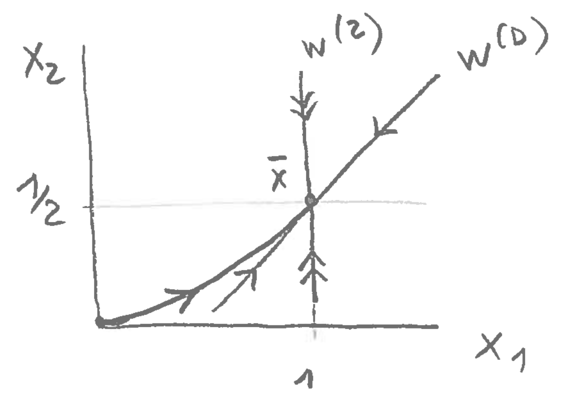
$\lambda_i < 0 \Rightarrow$ A. S.

Inoltre $\bar{x} = \begin{vmatrix} \frac{\bar{u}}{k_1} \\ \frac{\bar{u}}{k_2} \end{vmatrix}$

b) $x_1(0) = x_2(0) = 0 \qquad \bar{u} = 1$

• $k_1 = 1,\ k_2 = 2 \rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1/2 \end{vmatrix}$

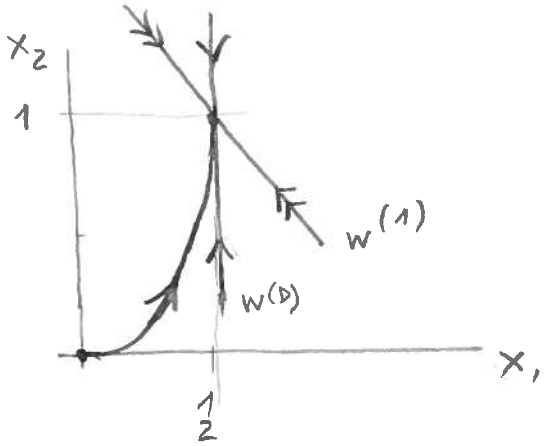
$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \rightsquigarrow \lambda_D \rightsquigarrow w^{(D)}:\ w_2 = w_1 \\ \lambda_2 = -2 \rightsquigarrow w^{(2)}:\ w_1 = 0 \end{array}$$



• $k_1 = 2$, $k_2 = 1 \rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1 \end{vmatrix}$

$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ $\qquad \lambda_1 = -2 \rightsquigarrow w^{(1)}: \; w_2 = -2w_1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_2 = -1 \rightsquigarrow \lambda_D \rightsquigarrow w_{(D)}: \; w_1 = 0$



3) Si consideri il seguente sistema a tempo continuo di ordine 1, dipendente da un parametro p:

$$\dot{x} = x - \frac{px}{1+x}$$

a) Determinare, per tutti i $p \geq 0$, gli stati di equilibrio $x \geq 0$ e rappresentarli nel piano (p, x).
b) Discutere, per tutti i $p \geq 0$, la stabilità degli stati di equilibrio determinati al punto a), utilizzando ove possibile il metodo di linearizzazione.

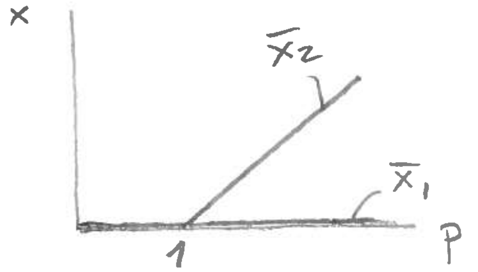
Si consideri poi il sistema:

$$\dot{x} = x - \frac{px^2}{1+x^2}$$

c) Determinare, per tutti i $p \geq 0$, gli stati di equilibrio $x \geq 0$ e rappresentarli nel piano (p, x), discutendone la stabilità ***[è fortemente consigliato l'uso di metodi grafici].***

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $\dot{X} = 0 \rightarrow X = \frac{pX}{1+X} \rightarrow x(1+x) = px$ $\nearrow \bar{x}_1 = 0$, $\searrow \bar{x}_2 = p-1 \geq 0$ per $p \geq 1$



b) $J = 1 - \frac{p}{(1+x)^2}$

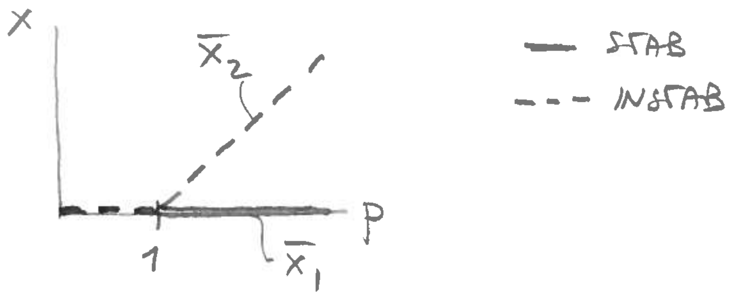
$J\big|_{\bar{x}_1 = 0} = 1 - p = \lambda$

- $p > 1 \rightarrow \lambda < 0 \rightarrow \bar{x}_1$ è loc. A.S.
- $p < 1 \rightarrow \lambda > 0 \rightarrow \bar{x}_1$ è INST.
- $p = 1 \rightarrow \lambda = 0$ Non si può dire niente!

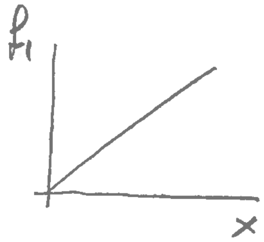
$J\big|_{\bar{x}_2 = p-1} = \frac{p-1}{p} = \lambda$
$(p \geq 1)$

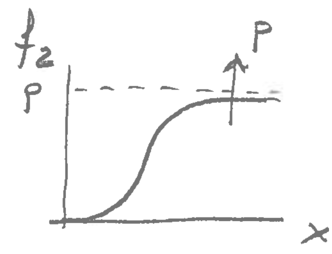
- $p > 1 \rightarrow \lambda > 0 \rightarrow \bar{x}_2$ è INST
- $p = 1 \rightarrow \lambda = 0$ Non si può dire niente!

Pertanto

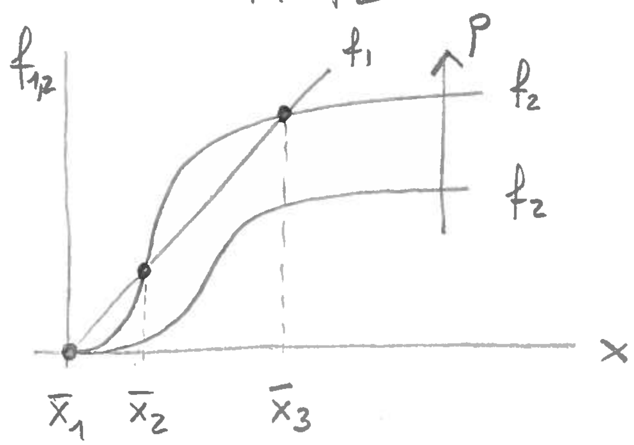


c) $\dot{x} = x - \dfrac{p x^2}{1+x^2} = f_1 - f_2$





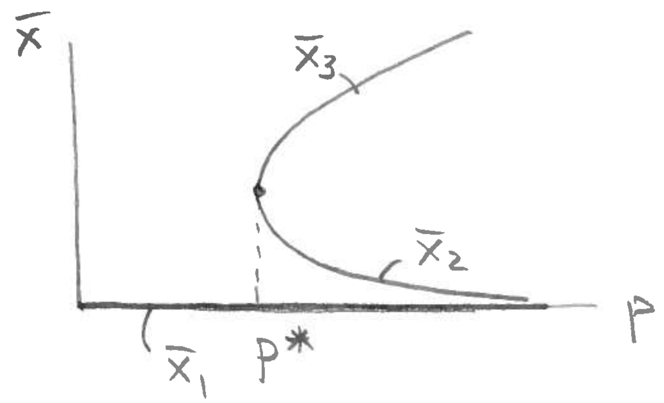
All'equilibrio $\dot{x} = 0 \Rightarrow f_1 = f_2$



$\bar{x}_1 = 0 \ \exists \ \forall p$

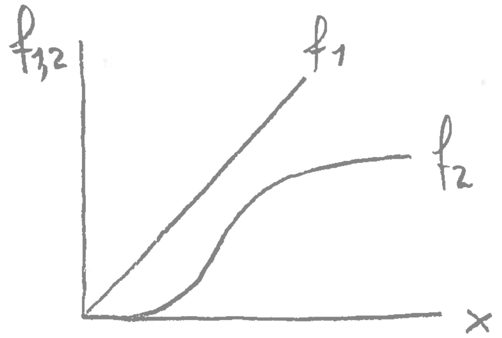
$\bar{x}_2, \bar{x}_3 \ \exists \ p > p^*$

$\Rightarrow$



Per quanto riguarda la stabilità:

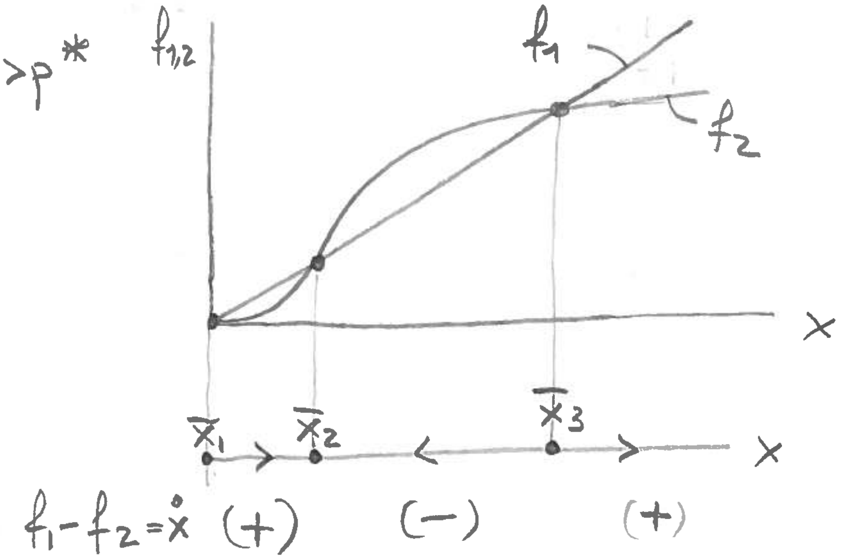
$p < p^*$



$f_1 > f_2 \ \forall x > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0$

e $\bar{x}_1 = 0$ è INST

$p > p^*$

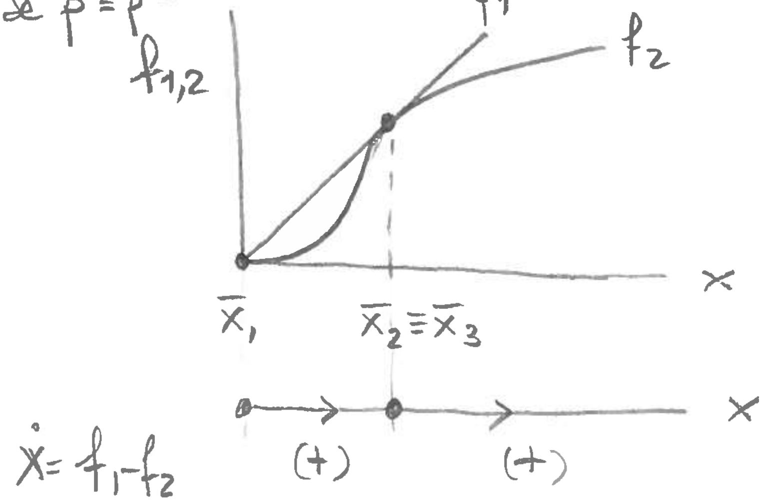


$\bar{x}_1$ è INST

$\bar{x}_2$ è STAB

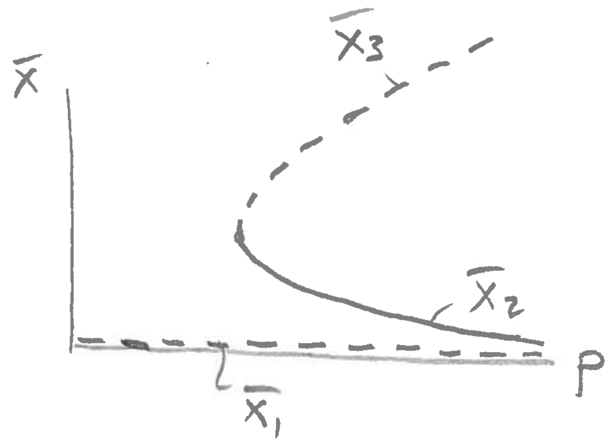
$\bar{x}_3$ è INST

se $p = p^*$



Tutti gli equilibri sono instabili

Pertanto



— STAB

- - - INSTAB

4) In due esperimenti successivi, a parità di ingresso $u(t)$, lo stato iniziale di un sistema lineare viene moltiplicato per 2. Specificare, motivando la risposta, quale delle risposte sotto riportate è corretta:

[1] L'uscita $y(t)$ raddoppia per ogni t.
[2] L'uscita $y(t)$ raddoppia a regime.
[3] La componente libera di $y(t)$ raddoppia per ogni t.
[4] La componente forzata di $y(t)$ raddoppia per ogni t.

5) Con riferimento al sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$:
a) Si definisca la nozione di stato di equilibrio;
b) Si indichi la procedura per individuare gli stati di equilibrio;
c) Si definisca la nozione di equilibrio asintoticamente stabile.

6) Si scriva la sequenza di istruzioni Matlab per simulare e visualizzare l'evoluzione del sistema $x(t+1) = -0.5x(t) + 1$ per 5 istanti di tempo a partire da stato iniziale nullo.

Risposte ai quesiti 4-5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

LIBERA FORZATA

4) $y(t) = y_L(t) + y_F(t)$

$y_L(t) = c\,\phi(t)\,x(0)$ $\qquad y_F(t) = c\,\psi(t)\,u(0) + d\,u(t)$

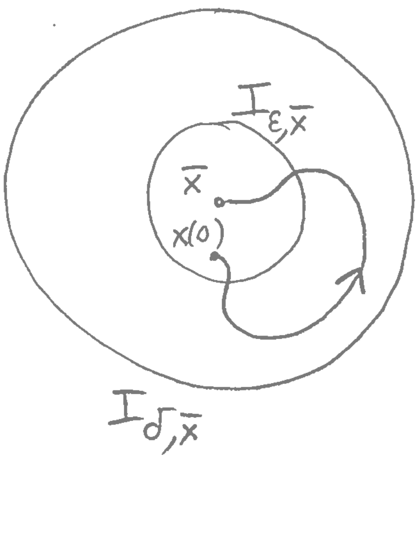
$u(t)$ non varia, $x(0)$ raddoppia $\Rightarrow$ solo $y_L(t)$ raddoppia

5) a) Equilibrio $\bar{x}$: $x(0) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x} \ \forall t \geq 0$

b) $f(\bar{x}) = 0$

c) $\exists I_{\varepsilon,\bar{x}} \,/\, \forall x(0) \in I_{\varepsilon,\bar{x}} : \exists \delta \,/\, x(t) \in I_{\delta,\bar{x}}$

e $x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{x}$



6) >> sistema = ss(-0,5, 1, 0, 0, 1)

A ↙ b ↓ c ↓ d ↓ → il sistema è a tempo discreto!

>> u = ones(5, 1) → ingresso costante e pari a 1 per 5 unità di tempo

>> t = 0:5 → vettore degli istanti di tempo

>> [y, t, x] = lsim(sistema, u, t) → Simulazione; la condizione iniziale (se non specificata) è già supposta nulla!

>> stairs(t, x) → visualizza il grafico