POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
2° prova parziale, 30/6/2017

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

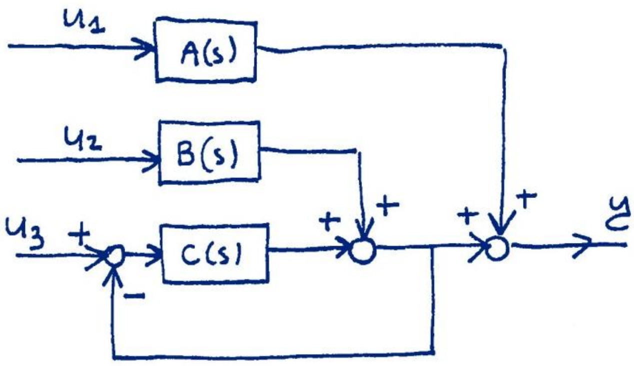
9	7	6	4	4	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !

- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura:



in cui $A(s) = s(s-1)/(s+1)^3$, $B(s) = 2/(s^2+2s+2)$, $C(s) = (4s+7)/(s+1)^2$.

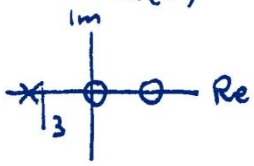
a) Determinare la funzione di trasferimento tra ciascun ingresso e l'uscita e discuterne la stabilità.
b) Determinare qualitativamente l'uscita $y(t)$ quando ai tre ingressi u_1, u_2, u_3 viene applicato uno scalino unitario agli istanti, rispettivamente, 0, 5, 10.
c) Determinare qualitativamente l'uscita $y(t)$ quando ai tre ingressi u_1, u_2, u_3 viene applicato un impulso unitario agli istanti, rispettivamente, 0, 5, 10.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $y = Au_1 + Bu_2 + C\left(u_3 - [y - Au_1]\right)$, da cui

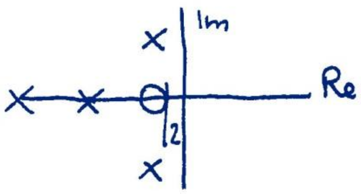
$$y = Au_1 + \underbrace{\frac{B}{1+C}}_{F(s)} u_2 + \underbrace{\frac{C}{1+C}}_{G(s)} u_3$$

$$A(s) = \frac{s(s-1)}{(s+1)^3}$$



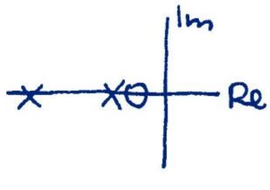
Re(poli) < 0 $\forall i$
$\Rightarrow$ asint. stabile

$$F(s) = \frac{2}{s^2+2s+2} \cdot \frac{1}{1+\frac{4s+7}{(s+1)^2}} = \frac{2(s+1)^2}{(s+1-i)(s+1+i)(s+2)(s+4)}$$



Re(poli) < 0 $\forall i$
$\Rightarrow$ asint. stabile

$$G(s) = \frac{\frac{4s+7}{(s+1)^2}}{1+\frac{4s+7}{(s+1)^2}} = \frac{4s+7}{(s+2)(s+4)}$$

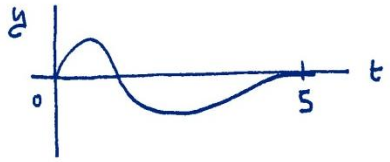


Re(poli) < 0 $\forall i$
$\Rightarrow$ asint. stabile

b) $A(s)$: $y(\infty) = A(0) = 0$

$r = 1$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1 > 0$, $T_R \simeq 5$

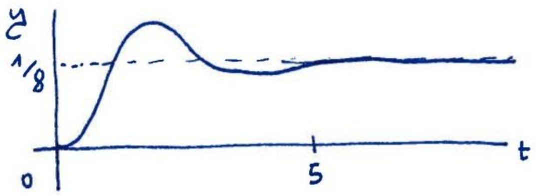
estremi : $m_s = 2$, $N = 2$



$F(s)$: $y(\infty) = F(0) = 1/8$

$r = 2$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = 2 > 0$, $T_R \simeq 5$

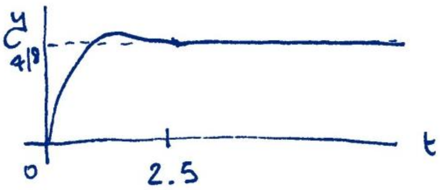
oscillazioni: $\tau = \dfrac{2\pi}{1}$



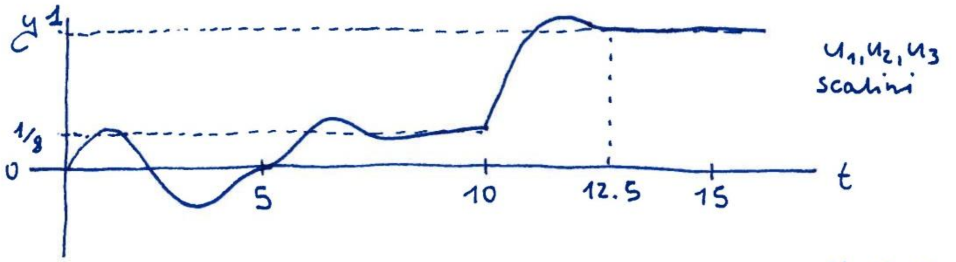
$G(s)$: $y(\infty) = G(0) = 7/8$

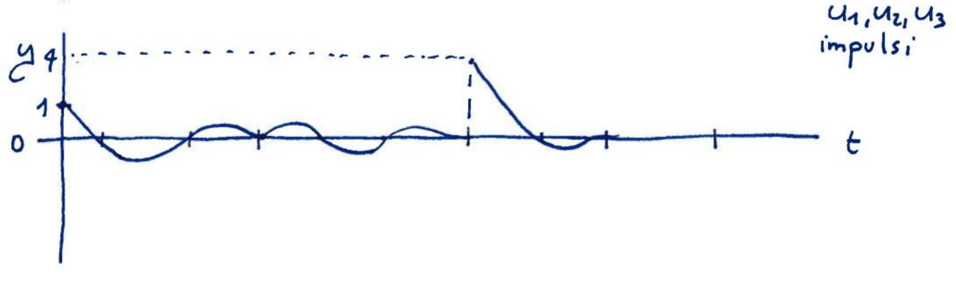
$r = 1$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 4 > 0$, $T_R \simeq 5/2$

estremi : $m_s = 1$, $N = 1$



Complessivamente (ricordando che la risposta all'impulso è ottenibile graficamente come derivata della risposta allo scalino):



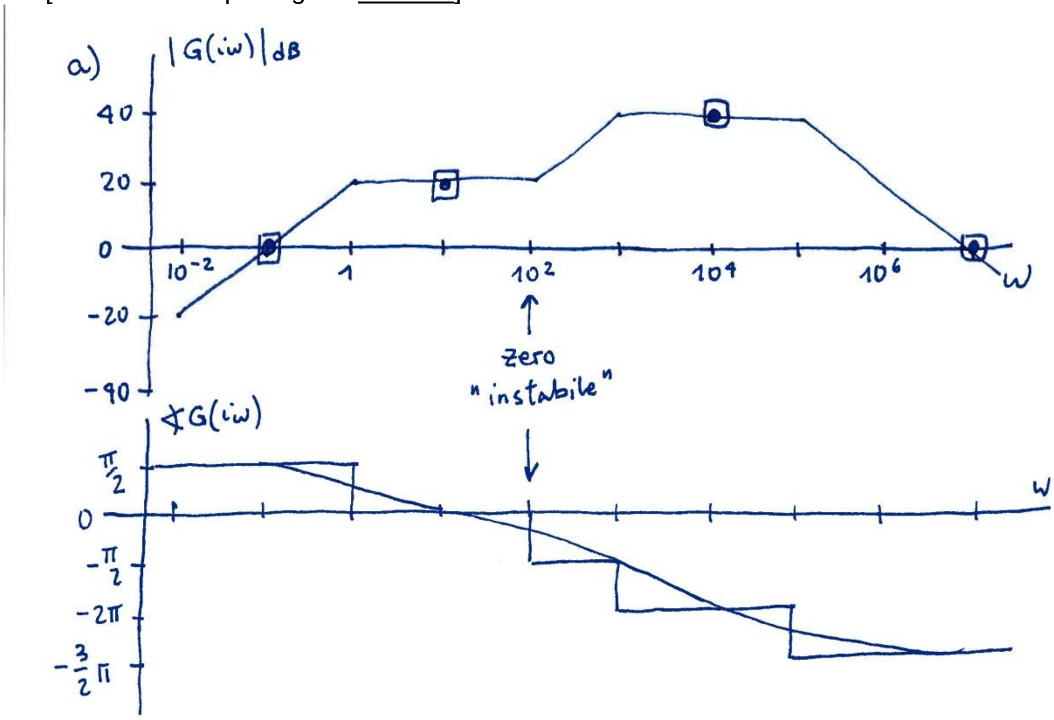


2) Un sistema dinamico è stato sottoposto a prove "in frequenza" applicando in ingresso sinusoidi di ampiezza unitaria alle frequenze $\omega = 0.1;\ 10;\ 10^4;\ 10^7$ e registrando in corrispondenza l'ampiezza dell'uscita, risultata rispettivamente pari a $1;\ 10;\ 100;\ 1$. Si è inoltre rilevato che lo sfasamento tende a $-270°$ per $\omega \to -\infty$. Infine, si è osservando che la risposta allo scalino del sistema tende asintoticamente a zero.

a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con tutte le prove sperimentali.
b) Determinare qualitativamente la risposta allo scalino del sistema.
c) Determinare (anche in modo approssimato utilizzando i diagrammi di Bode) l'uscita a transitorio esaurito quando $u(t) = 20 + sin(0.01t) + 12sin(10^6 t)$ (specificare quantitativamente anche i valori degli sfasamenti).

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

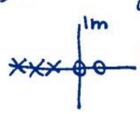
a)



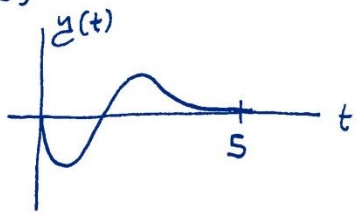
La risposta allo scalino implica $G(0)=0$ (tipo $=-1$); il dato sulla fase per $\omega \to \infty$ implica la presenza di uno zero positivo.

$$G(s) = \frac{10s\,(1-0.01s)}{(1+s)(1+10^{-3}s)(1+10^{-5}s)}$$

b) $r=1$: $y(0)=0$, $\dot{y}(0) < 0$



$N = 2$; $T_R \simeq 5$



c) $y(t) = 20 \cdot \underbrace{G(0)}_{\to 0} + |G(i0.01)| \sin\left(0.01t + \measuredangle G(i0.01)\right) +$
$+ 12 \cdot |G(i10^6)| \sin\left(10^6 t + \measuredangle G(i10^6)\right) =$
$= 0.1 \sin\left(0.01t + \frac{\pi}{2}\right) + 120 \sin\left(10^6 t - \frac{3}{2}\pi\right)$

3) Si consideri il seguente sistema a tempo discreto, in cui l'uscita è la seconda variabile di stato.

$$x_1(t+1) = -2x_1(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = 3x_1(t) - x_2(t)$$

a) Studiarne la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità.
b) Se possibile, progettare un regolatore (ricostruttore asintotico dello stato + legge di controllo) in cui, a fronte di ingresso costante, lo stato di equilibrio venga raggiunto in circa 5 istanti di tempo [NB: è sufficiente scrivere i sistemi di equazioni risolvendo i quali si ottengono k,l].

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\sigma(A) = \{-2, -1\}$

$\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1 \Rightarrow A$ INSTABILE

$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\det R \neq 0 \Rightarrow (A, b)$ completamente raggiungibile

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\det \mathcal{O} \neq 0 \Rightarrow (A, c)$ completamente osservabile

b) Poichè (A, b, c) è completamente Ragg. & Oss., è possibile progettare il regolatore assegnando arbitrariamente $\sigma(A+bk)$ e $\sigma(A+\ell c)$.

$T_R = 5 \Rightarrow T_D = 1$. Poichè $T_D = -\frac{1}{\log|\lambda_D|} \Rightarrow |\lambda_D| = e^{-\frac{1}{T_D}} = \frac{1}{e}$

Pongo $\sigma(A+bk) = \sigma(A+\ell c) = \{\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\}$

$$A + bk = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2+k_1 & k_2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} tr = -3 + k_1 = \frac{2}{e} \\ det = 2 - k_1 - 3k_2 = \frac{1}{e^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dots \\ k_2 = \dots \end{cases}$$

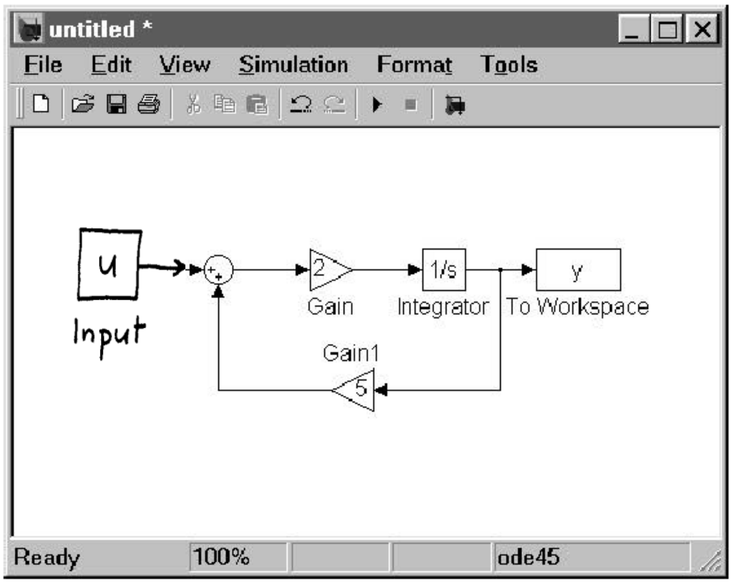
$$A + \ell c = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & \ell_1 \\ 3 & -1+\ell_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} tr = -3 + \ell_2 = \frac{2}{e} \\ det = 2 - 2\ell_2 - 3\ell_1 = \frac{1}{e^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_1 = \dots \\ \ell_2 = \dots \end{cases}$$

4) Definire la nozione di sistema stabilizzabile e fornire una condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stabilizzabile.

5) Definire la nozione di stabilità esterna e discutere la relazione tra stabilità esterna e interna (asintotica).

6) Determinare il modello ingresso/uscita (equazione differenziale o funzione di trasferimento) corrispondente allo schema Simulink in figura.



Risposte ai quesiti 4-5-6 [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

4) Un sistema (A, b) è stabilizzabile se esiste K tale che $(A+bk)$ è asintoticamente stabile.

Se (A, b) è completamente raggiungibile, allora è stabilizzabile.

Se (A, b) non è completamente raggiungibile, allora è stabilizzabile se e solo se la parte non raggiungibile è asintoticamente stabile.

5) Un sistema (A, b, c, d) è esternamente stabile se, dato $x(0)=0$, l'uscita $y(t)$ è limitata per ogni ingresso $u(t)$ limitato.

A asintoticamente stabile $\Rightarrow (A, b, c, d)$ esternam. stabile.

Se (A, b, c, d) compl. raggiung. e compl. osservabile:

A asint. stabile $\Leftrightarrow (A, b, c, d)$ estern. stabile.

6) Dallo schema si deduce:

$$y = \frac{2}{s}(5y+u) \quad \text{da cui} \quad y = \frac{2}{s-10}u$$

quindi $G(s) = \dfrac{2}{s-10}$, $\dot{y} - 10y = 2u$