POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 17/7/2017

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

6	6	6	6	3	3	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Un processo produttivo è composto di due fasi (A e B) da svolgersi in cascata, ciascuna della durata di 1 ora.

All'istante (=ora) t, una quantità $u(t)$ di nuovo materiale viene posta in lavorazione. Al termine della fase A, la frazione $0 < \alpha < 1$ di materiale lavorato è accumulata nelle scorte S, mentre la restante parte passa nella fase B. Al termine della fase B, la frazione $0 < \beta < 1$ di materiale lavorato è anch'essa accumulata nelle scorte S, mentre la restante parte è sottoposta a un controllo di qualità (di durata trascurabile) che stabilisce che, mediamente, la frazione $0 < \gamma < 1$ deve ripetere la lavorazione a partire dalla fase A. La restante parte, quella cioè che passa con successo il controllo di qualità, ha terminato la lavorazione.

a) Descrivere il processo produttivo mediante un sistema lineare a tempo discreto di ordine 3 (fase A, fase B, scorte S), in cui l'uscita $y(t)$ rappresenti la quantità di materiale che ha terminato la lavorazione.
b) Discutere la stabilità del sistema al variare di (α, β, γ).
c) Discutere e calcolare gli stati di equilibrio del sistema per u costante.
d) Determinare la funzione di trasferimento, discutendo il risultato ottenuto.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a)
$$x_1(t+1) = u(t) + \gamma(1-\beta)\, x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = (1-\alpha)\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + x_3(t)$$
$$y(t) = (1-\gamma)(1-\beta)\, x_2(t)$$

b)
$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \gamma(1-\beta) & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \hline \alpha & \beta & 1 \end{array}\right] \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\gamma(1-\alpha)(1-\beta)}$$

Siccome $0<\alpha,\beta,\gamma<1$, $|\lambda_{2,3}|<1 \ \forall \alpha,\beta,\gamma$, quindi A è SEMPLICEMENTE STABILE $(\lambda_1 = 1)$: con ingresso $u=0$ (movimento libero), $x_3(t) \not\to 0$ se $x_3(t) \neq 0$.

c)
$$\begin{cases} x_1 = u + \gamma(1-\beta)x_2 \\ x_2 = (1-\alpha)x_1 \\ x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{1-\gamma(1-\alpha)(1-\beta)}u \qquad x_2 = \frac{(1-\alpha)}{1-\gamma(1-\alpha)(1-\beta)}u$$

- se $u \neq 0 \Rightarrow x_1, x_2 \neq 0 \Rightarrow \nexists$ equilibrio per x_3.
- se $u = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = 0 \Rightarrow \exists \infty$ eq: x_3 qualsiasi

d)
$$\begin{cases} z x_1 = u + \gamma(1-\beta)x_2 \\ z x_2 = (1-\alpha)x_1 \\ z x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 \\ y = (1-\gamma)(1-\beta)x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad G(z) = \frac{(1-\gamma)(1-\beta)(1-\alpha)}{z^2 - \gamma(1-\alpha)(1-\beta)}$$

(NB: perdita di grado, x_3 non influenza y.)

2) Si consideri il sistema seguente, avente stato $(x, y) \in R^2$:

$$\dot{x} = x(1-x) - p$$
$$\dot{y} = -2y$$

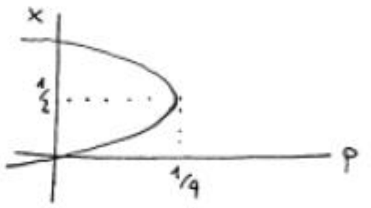
a) Determinare gli stati di equilibrio al variare di $p \in (-\infty, +\infty)$.
b) Studiare, per ogni p, la stabilità degli equilibri sopra determinati mediante il metodo di linearizzazione.
c) Nei due casi $p = 0$ e $p = 1$, discutere il quadro delle traiettorie descrivendone gli elementi fondamentali (eventuali equilibri e loro varietà stabili/instabili, alcune traiettorie non rettilinee).

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $\begin{cases} x(1-x) - p = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + p = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ → deve avere soluzione reale:

se $1-4p > 0$: $\exists$ 2 equilibri distinti: $\left(x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2} \, , \, y = 0 \right)$

se $1-4p = 0$: $\exists$ 1 equilibrio : $\left(x = \frac{1}{2} \, , \, y = 0 \right)$
se $1-4p < 0$: $\nexists$ equilibri



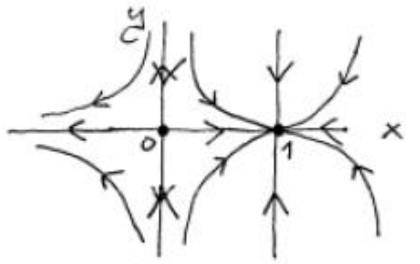
b) $J = \begin{vmatrix} 1-2x & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ se $1-4p > 0$: $1-2x = 1 - 2\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}\right) = \mp\sqrt{1-4p}$

Dette $x' > x''$ le ascisse dei 2 eq., abbiamo x' ASINT. STABILE (nodo)
x'' INSTABILE (sella)

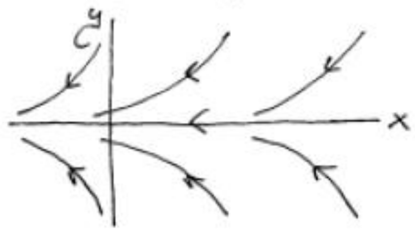
se $1-4p = 0$, $J = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$, non è possibile concludere nulla mediante linearizzazione.

c) $p = 0$: equilibri : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $J = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

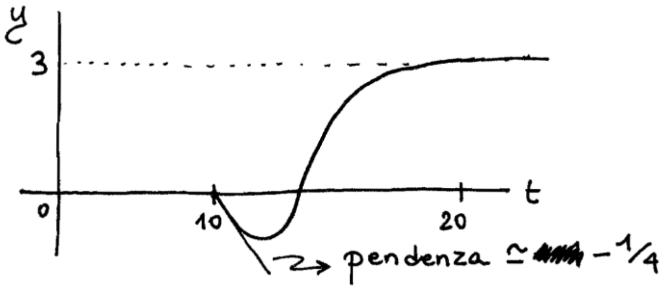
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$



$p = 1$: $\nexists$ equilibri $y(t) = e^{-2t} y(0) \to 0$
$\dot{x} = x(1-x) - 1 < 0 \;\; \forall x$



3) In figura è rappresentata la risposta allo scalino unitario (applicato in $t = 0$) rilevata sperimentalmente su un sistema.

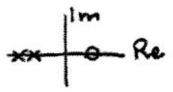


a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con la rilevazione sperimentale.
b) Determinare (in modo qualitativo) e rappresentare graficamente la risposta all'impulso del sistema ottenuto mettendo in cascata a $G(s)$ il sistema con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1}{s(25s^2 + 10s + 26)}$$

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Ritardo puro di 10.
Sistema esternamente stabile, $G(0) = y_\infty = 3$.
$T_R \simeq 10 \Rightarrow T_D \simeq 2$
1 estremo $\Rightarrow$ 1 zero superiore "instabile", poiché $\dot{y}(10) < 0$



$$G(s) = 3\,\frac{1 - s\tau}{(1+sT_1)(1+sT_2)}\,e^{-10s}$$

Scelgo $T_1 = T_2 = 2\ (= T_D)$, $\dot{y}(10) = -\frac{3\tau}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \tau = \frac{1}{3}$

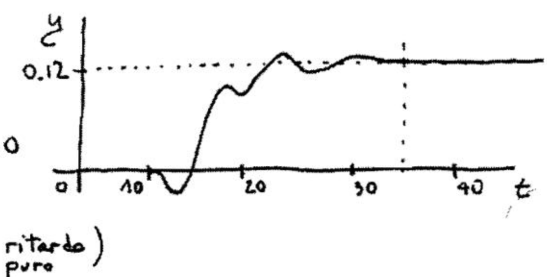
$$G(s) = 3\,\frac{1 - s\frac{1}{3}}{(1+2s)^2}\,e^{-10s}$$

b) $$F(s) = G(s)H(s) = \frac{3}{s}\,\frac{1 - s\frac{1}{3}}{(1+2s)^2(25s^2+10s+26)}\,e^{-10s}$$

Risp. impulso di F coincide con Risp. SCALINO di

$$\tilde{F}(s) = 3\,\frac{1 - s\frac{1}{3}}{(1+2s)^2\underbrace{(25s^2+10s+26)}_{\text{poli complessi: } -\frac{1}{5} \pm i}}\,e^{-10s}$$

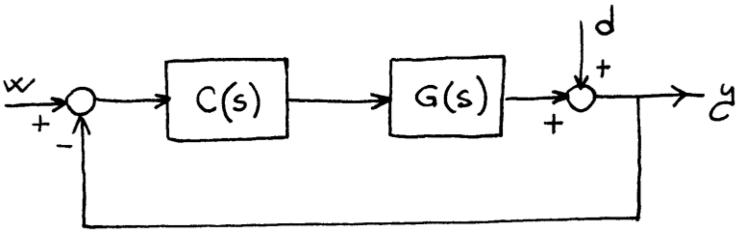
$\tilde{F}$ est. stabile (tutti i poli hanno $Re(p) < 0$)
$y_\infty = \tilde{F}(0) = 3/26 \simeq 0.12$
$\tilde{r} = 3$: $y(10) = \dot{y}(10) = \ddot{y}(10) = 0$
$\dddot{y}(10) = -1/100 < 0$



$T_D = 5 \Rightarrow T_R = 25$ (+10 ritardo puro)
$\tau_{osc} \simeq \frac{2\pi}{Im(p)} = 2\pi$

4) Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui

$$G(s) = \frac{0.1}{(1+100s)(1+0.1s)(1+s)}.$$



a) Determinare un controllore $C(s)$, con esattamente 1 polo e 1 zero, tale che:

- il sistema di controllo sia esternamente stabile;
- l'errore a transitorio esaurito dovuto al riferimento costante sia nullo;
- il tempo di risposta sia (approssimativamente) pari a 5.

b) Per il sistema di controllo così ottenuto, calcolare il margine di fase e la banda passante.

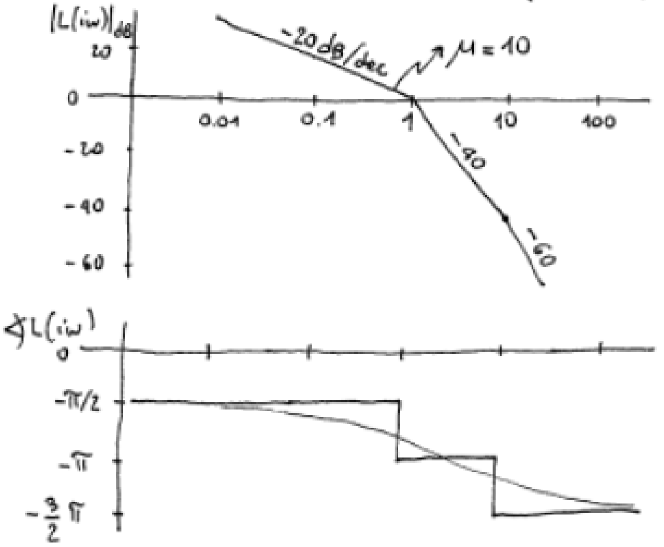
c) Determinare l'errore a transitorio esaurito dovuto al disturbo $d(t) = 10 + sin(0.01t)$.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) Per soddisfare il secondo requisito, è indispensabile che $C(s)$ abbia un polo $s=0$ (tipo $g=1$) quindi:

$$C(s) = \frac{\mu}{s}(1+s\tau)$$

Posto $\tau = 100$ (lo zero di $C(s)$ elimina il polo in bassa frequenza di $G(s)$) si ottiene $L(s) = \dfrac{0.1\,\mu}{s(1+0.1s)(1+s)}$.



Per $\mu = 10$:

$\omega_c = 1$,

$\varphi_c = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\, 0.1 - \text{arctg}\, 1 = -\frac{\pi}{2} - 0.1 - \frac{\pi}{4} \simeq -2.455$

$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = 0.685$ [rad] $\simeq 39°$

$\Rightarrow$ sistema di controllo esternamente stabile

$\Rightarrow T_R \simeq \frac{5}{\omega_c} = 5$

b) $\varphi_m \simeq 39°$ (vedi a)), $BP = (0, \omega_c) = (0, 1)$

c) Poiché $g = 1$, la componente costante di $d(t)$ genera errore nullo. Quindi:

$$e_\infty(t) = \underbrace{\left|\frac{1}{1+L(i0.01)}\right|}_{\simeq \frac{1}{|L(i0.01)|} \simeq \frac{1}{100}} \sin(0.01t + \varphi)$$

, poiché $0.01 \ll \omega_c = 1$.

5) Definire il concetto di sistema "a memoria finita".

6) Si consideri un sistema lineare asintoticamente stabile, con costante di tempo dominante $T_d = 3$ secondi. Se al sistema viene applicato l'ingresso $u(t) = 10sin(2t)$, a regime

- [1] l'uscita vale 0, qualunque sia il sistema
- [2] l'uscita vale 0, se e solo se il sistema ha guadagno $\mu = 0$
- [3] l'uscita è una sinusoide di pulsazione $\omega = 2$, per ogni $x(0)$
- [4] l'uscita è una sinusoide di pulsazione $\omega = 2\pi/2$, per ogni $x(0)$

(scegliere - e motivare - la risposta corretta)

7) Illustrare i comandi Matlab per simulare l'andamento dell'uscita del sistema dinamico

$$\mathrm{x(t+1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} \mathrm{x(t)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{u(t)}$$
$$\mathrm{y(t)} = [2 \quad -1]\mathrm{x(t)} + 3\mathrm{u(t)}$$

partendo dalla condizione iniziale $\mathrm{x}(0) = [-1 \quad 2]^{\mathrm{T}}$, su un orizzonte di $\mathrm{T} = 10$ unità di tempo, con ingresso costante $\mathrm{u} = 2$.

Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire sul retro]:

5)
Il sistema a tempo discreto $x(t+1) = A\,x(t)$ si dice "a memoria finita" se il suo movimento libero si arresta in tempo finito; cioè, se esiste $m > 0$ (intero) tale che $\phi(m)\,x(0) = A^m x(0) = 0$, per ogni $x(0)$.

6)
Per il teorema della risposta in frequenza, applicando un ingresso sinusoidale a un sistema asintoticamente stabile otteniamo, a transitorio esaurito, un'uscita sinusoidale della medesima frequenza, qualunque sia $x(0)$. Quindi la risposta corretta è la [3].

7)
```
sys = ss([-1,1; 2,0.5], [1;0], [2,-1], 3, 1);
lsim(sys, 2*ones(11,1), 0:10, [-1; 2])
```