POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 19/1/2018

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

							Voto totale
6	6	6	6	3	3	2	32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Un processo produttivo è composto di due fasi (A e B) da svolgersi in cascata, ciascuna della durata di 1 ora.

All'istante (=ora) t, una quantità $u(t)$ di nuovo materiale viene posta in lavorazione. Al termine della fase A, la frazione $0 < \alpha < 1$ di materiale lavorato è accumulata nelle scorte S, mentre la restante parte passa nella fase B. Al termine della fase B, la frazione $0 < \beta < 1$ di materiale lavorato è anch'essa accumulata nelle scorte S, mentre la restante parte è sottoposta a un controllo di qualità (di durata trascurabile) che stabilisce che, mediamente, la frazione $0 < \gamma < 1$ deve ripetere la lavorazione a partire dalla fase A. La restante parte, quella cioè che passa con successo il controllo di qualità, ha terminato la lavorazione.

a) Descrivere il processo produttivo mediante un sistema lineare a tempo discreto di ordine 3 (fase A, fase B, scorte S), in cui l'uscita $y(t)$ rappresenti la quantità di materiale che ha terminato la lavorazione.
b) Discutere la stabilità del sistema al variare di (α, β, γ).
c) Discutere e calcolare gli stati di equilibrio del sistema per u costante.
d) Determinare la funzione di trasferimento e il guadagno del sistema.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $x_1(t+1) = u(t) + \gamma(1-\beta)\, x_2(t)$

$x_2(t+1) = (1-\alpha)\, x_1(t)$

$x_3(t+1) = \alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t) + x_3(t)$

$y(t) = (1-\gamma)(1-\beta)\, x_2(t)$

b) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \gamma(1-\beta) & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \hline \alpha & \beta & 1 \end{array}\right]$ $\quad \lambda_1 = 1$

$\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\gamma(1-\alpha)(1-\beta)}$

Siccome $0<\alpha,\beta,\gamma<1$, $|\lambda_{2,3}|<1 \ \forall \alpha,\beta,\gamma$, quindi A e' SEMPLICEMENTE STABILE ($\lambda_1 = 1$): con ingresso $u=0$ (movimento libero), $x_3(t) \not\to 0$ se $x_3(t) \neq 0$.

c) $\begin{cases} x_1 = u + \gamma(1-\beta)\, x_2 \\ x_2 = (1-\alpha)\, x_1 \\ x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 \end{cases} \Longrightarrow \quad x_1 = \dfrac{1}{1-\gamma(1-\alpha)(1-\beta)}\, u \qquad x_2 = \dfrac{(1-\alpha)}{1-\gamma(1-\alpha)(1-\beta)}\, u$

- se $u \neq 0 \Rightarrow x_1, x_2 \neq 0 \Rightarrow \nexists$ equilibrio per x_3.
- se $u = 0 \Longrightarrow x_1, x_2 = 0 \Longrightarrow \exists\, \infty$ eq: x_3 qualsiasi

d) $\begin{cases} z x_1 = u + \gamma(1-\beta)\, x_2 \\ z x_2 = (1-\alpha)\, x_1 \\ z x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 \\ y = (1-\gamma)(1-\beta)\, x_2 \end{cases} \Longrightarrow \quad G(z) = \dfrac{(1-\gamma)(1-\beta)(1-\alpha)}{z^2 - \gamma(1-\alpha)(1-\beta)}$

(NB: perdita di grado, x_3 non influenza y.)

2) Nel seguente sistema a tempo continuo di ordine 1, $x(t)$ rappresenta la frazione (rispetto al totale della popolazione) di acquirenti di un certo prodotto ($0 \le x(t) \le 1$). La creazione di nuovi acquirenti avviene per "contagio" (passa-parola) tra gli acquirenti x e i non acquirenti $(1-x)$.

$$\dot{x} = -x + px(1-x)$$

a) Determinare, per tutti i $p > 0$, gli stati di equilibrio del sistema e rappresentarli in un piano (p, x).
b) Discutere, per tutti i $p > 0$, la stabilità degli stati di equilibrio determinati al punto a).

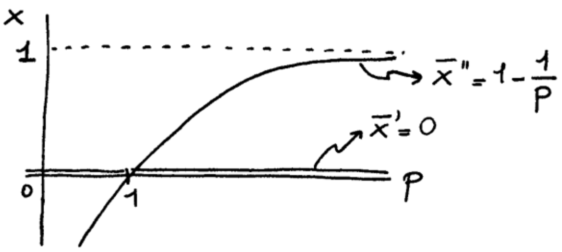
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) calcolo equilibri:

$\dot{x}=0 \Rightarrow -x+px(1-x)=0$

$\hookrightarrow \bar{x}'=0$

$-1+p(1-x)=0 \rightarrow \bar{x}''=1-\frac{1}{p}$, $\bar{x}''>0$ se $p>1$



b) Jacobiano: $J=\frac{\partial f}{\partial x}=-1+p-2px$

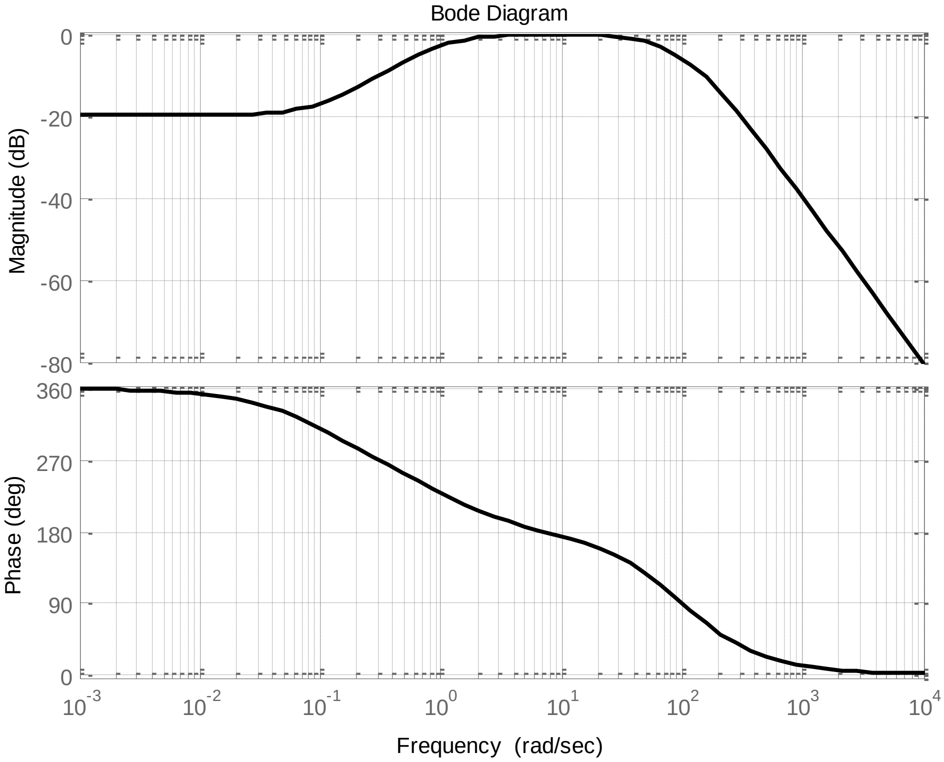
$J|_{\bar{x}'=0}=-1+p$, asint. stabile se $p<1$, instabile se $p>1$

$J|_{\bar{x}''=1-\frac{1}{p}}=1-p$, instabile se $p<1$, asint. stabile se $p>1$

Per $p=1$: $\bar{x}'=\bar{x}''=0$, ma $J|_{\bar{x}'}=J|_{\bar{x}''}=0$ non permette di discutere la stabilità;

Per $p=1$ il sistema diventa: $\dot{x}=-x^2$, quindi $x \to 0$ se $x(0)>0$ ma $x \to -\infty$ se $x(0)<0 \Rightarrow$ $\bar{x}$ è instabile.

3) Mediante esperimenti su un circuito elettrico si sono ricavati i seguenti diagrammi di Bode del modulo e della fase (nota bene: la scala usata per la fase è del tutto equivalente a quella usuale: 360°=0°, 270°= - 90°, …).



a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con i diagrammi di Bode.
b) Determinare, ricavando dai diagrammi di Bode le informazioni necessarie, l'uscita a transitorio esaurito quando

$$u(t) = -10 + \sin(0.3t) + \sin\left(100t - \frac{\pi}{8}\right)$$

c) Determinare, in modo qualitativo, la risposta allo scalino e la risposta all'impulso, discutendo anche il tempo di risposta del sistema.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $0.1 \dfrac{(1-10s)}{(1+s)(1+0.01s)^2} = G(s)$, esternamente stabile

b) $y(t) = -10 \cdot G(0) + |G(i0.3)| \sin\left(0.3t + \measuredangle G(i0.3)\right)$

$+ |G(i100)| \sin\left(100t - \frac{\pi}{8} + \measuredangle G(i100)\right) =$

$= -1 + \underbrace{0.316}_{\simeq 10 dB} \sin\left(0.3t - \frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{0.501}_{\simeq -6 dB} \sin\left(100t - \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}\pi\right)$

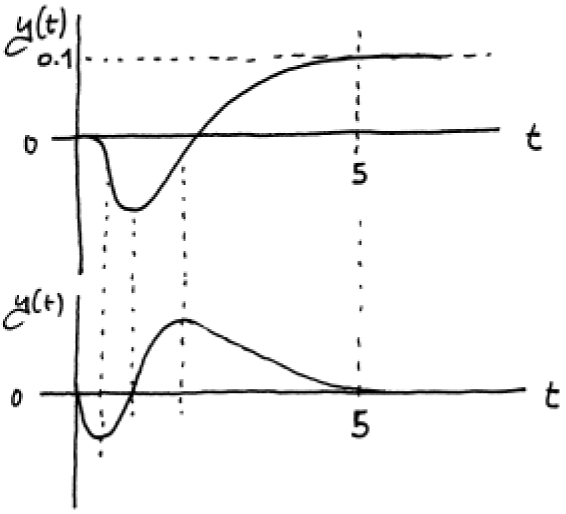
c) $u(t) = sca(t)$

$r = 2 \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$

$\ddot{y}(0) = -\frac{1}{10^4} = -10^4 < 0$

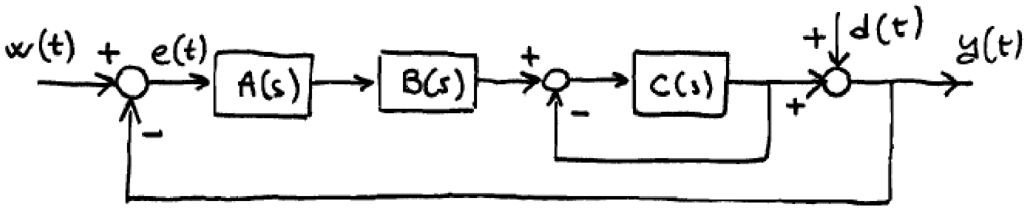
$y_\infty = G(0) = 0.1$

$T_R \simeq 5T_d = 5$



risposta all'impulso, ottenuta graficamente per derivazione

4) Si consideri il sistema in figura, in cui $B(s) = (1 - s)/(s + 1)$ e $C(s) = 1/s$.



a) Determinare una possibile funzione di trasferimento per il blocco $A(s)$, contenente 1 polo e 1 zero, affinché il sistema risulti asintoticamente stabile con un margine di fase di circa 90°, e l'errore $e(t)$ a regime a fronte di ingressi costanti sia nullo.
b) Stimare, anche in modo approssimato, la banda del sistema e il suo tempo di risposta.
c) Determinare, anche in modo approssimato, l'ampiezza dell'errore a regime dovuto a un disturbo $d(t) = 0.1\sin(10t)$.

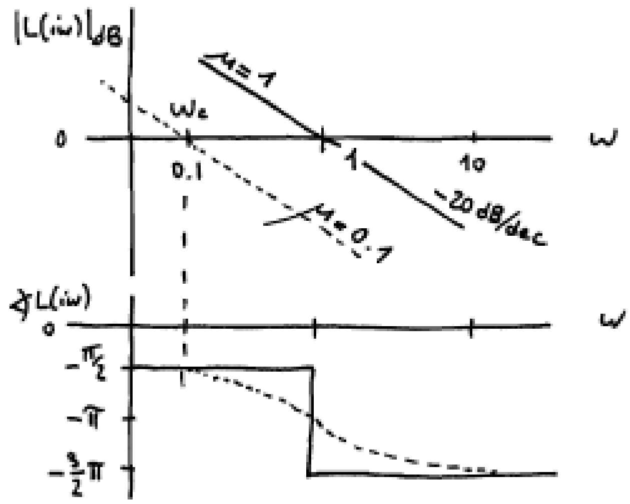
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Per avere $e_w(\infty) = e_d(\infty) = 0$ la $L(s)$ deve contenere un integratore, quindi:

$$A(s) = \frac{\mu}{s}(1+s\tau) \Longrightarrow L(s) = \frac{\mu}{s}(1+s\tau)\,\frac{1-s}{1+s}\,\frac{1}{1+s} \rightarrow C(s) \text{ retroaz.}$$

Pongo $\tau = 1$, quindi $L(s) = \frac{\mu}{s}\,\frac{1-s}{1+s}$.

Applico il criterio di Bode ($L(s)$ non ha poli con $Re(p_i) > 0$):



Ponendo $\mu = 0.1$ si ottiene:

$\omega_c = 0.1 \quad \varphi_c \simeq -\pi/2$

$\varphi_m \simeq \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

b) $BP = \{\omega : 0 < \omega < \omega_c\}$
$= \{\omega : 0 < \omega < 0.1\}$

$T_R \simeq \frac{5}{\omega_c} = 50$

c) La frequenza $\omega = 10$ è abbondantemente al di fuori della banda passante del sistema retroazionato $H = L/(1+L)$. Quindi $|H(i10)| \cong 0\,dB = 1$ e $e(t) = 0.1 \sin(10t + \varphi)$.

5) Con riferimento al sistema dinamico lineare (A, b, c, d), si definiscano i concetti di sistema asintoticamente stabile, semplicemente stabile, instabile, sulla base del movimento libero del sistema.

6) Si consideri un sistema lineare asintoticamente stabile, con costante di tempo dominante $T_d = 3$ secondi. Se al sistema viene applicato l'ingresso $u(t) = 10\sin(2t)$, a regime

[1] l'uscita vale 0, qualunque sia il sistema
[2] l'uscita vale 0, se e solo se il sistema ha guadagno $\mu = 0$
[3] l'uscita è una sinusoide di pulsazione $\omega = 2$, per ogni $x(0)$
[4] l'uscita è una sinusoide di pulsazione $\omega = 2\pi/2$, per ogni $x(0)$

(*scegliere - e motivare - la risposta corretta*)

7) Illustrare i comandi Matlab per simulare l'andamento dell'uscita del sistema dinamico

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + 3u(t)$$

partendo dalla condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$, su un orizzonte di $T = 10$ unità di tempo, con ingresso costante $u = 2$.

Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

5)

A è asintoticamente stabile se il mov. libero $\to 0$ $\forall x(0)$.

A è semplicemente stabile se il mov. libero è limitato $\forall x(0)$ ma, per qualche $x(0)$, non tende a 0.

A è instabile se il mov. libero è illimitato per qualche $x(0)$.

6)

Per il teorema della risposta in frequenza, applicando un ingresso sinusoidale a un sistema asintoticamente stabile otteniamo, a transitorio esaurito, un'uscita sinusoidale della medesima frequenza, qualunque sia $x(0)$. Quindi la risposta corretta è la [3].

7)

```
sys = ss([-1,1; 2,0.5],[1;0],[2,-1],3,1);
lsim(sys, 2*ones(11,1), 0:10, [-1; 2])
```