POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 22/6/2018

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:_____

6	6	6	6	3	3	2		Voto totale 32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)
In una popolazione di molluschi ciascun individuo vive 3 mesi, dopodiché si riproduce (deponendo in media 1728 uova) subito prima di morire. Le probabilità di sopravvivenza nei tre mesi di vita approssimativamente coincidono e valgono $s_o = s_1 = s_2 = \alpha$.

a) Descrivere la popolazione con un modello a classi d'età.
b) Discutere la stabilità del sistema per tutti i valori di $\alpha > 0$.
c) Nel caso di asintotica stabilità, discutere il tempo di estinzione della popolazione e l'esistenza di oscillazioni nel movimento libero.
d) Introdurre nel modello una variabile d'ingresso che descriva l'immigrazione di adulti (seconda e terza classe d'età) dall'esterno, supponendo gli adulti immigrati si distribuiscano alla pari nelle due classi d'età relative, e una variabile di uscita che rappresenti il numero complessivo di adulti nella popolazione.
e) Determinare la funzione di trasferimento e il modello ingresso/uscita in forma di equazione alle differenze.
f) Utilizzando la funzione di trasferimento, determinare il numero di adulti a regime se $u(t) = \bar{u} = 2500$ e $\alpha = 0.05$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

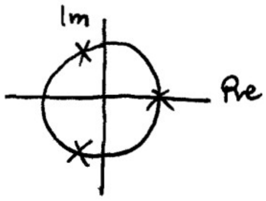
a) $x_i(t)$ = n. individui che compiono i mesi all'istante t $(i = 1, 2, 3)$

$x_1(t+1) = \alpha \cdot 1728 \cdot x_3(t)$
$x_2(t+1) = \alpha x_1(t)$
$x_3(t+1) = \alpha x_2(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1728\alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1728\alpha \\ -\alpha & \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1728\alpha^3$$

eq. caratteristica:
$\lambda^3 = 1728\alpha^3$



I tre autovalori hanno modulo
$|\lambda| = \sqrt[3]{1728\alpha^3} = 12\alpha$, quindi

A asint. stabile $\iff \alpha < \frac{1}{12}$

A semplic. stabile $\iff \alpha = \frac{1}{12}$
($\lambda_{1,2,3}$ sono radici semplici di $\Delta_A(\lambda)$)

A instabile $\iff A > \frac{1}{12}$

c) $T_R \cong 5T_D = 5 \cdot \dfrac{1}{-\ln\sqrt[3]{1728\alpha^3}}$, $\exists\ \lambda$ complessi $\Rightarrow$ oscillazioni

d) $x_1(t+1) = \alpha\, 1728 \cdot x_3(t)$

$x_2(t+1) = \alpha\, x_1(t) + 0.5\, u(t)$

$x_3(t+1) = \alpha\, x_2(t) + 0.5\, u(t)$

$y = x_2(t) + x_3(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1728\alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $G(z) = \dfrac{z^2 + 0.5\alpha z + 864\alpha^2}{z^3 - 1728\alpha^3}$; $y(t+3) = 1728\alpha^3 y(t) + u(t+2) +$
$+ 0.5\alpha\, u(t+1) + 864\alpha^2 u(t)$

f) $\bar{y} = G(1)\,\bar{u} = \dfrac{1 + 0.5 \cdot 0.05 + 864\,(0.05)^2}{1 - 1728\,(0.05)^3} \cdot 2500 = 10156$

2)

Si consideri il sistema seguente, avente stato $(x, y) \in R^2$:

$$\dot{x} = x(1-x) - p$$
$$\dot{y} = -2y$$

a) Determinare gli stati di equilibrio al variare di $p \in (-\infty, +\infty)$.

b) Studiare, per ogni p per cui sia possibile, la stabilità degli equilibri sopra determinati mediante il metodo di linearizzazione.

c) Nei due casi $p = 0$ e $p = 1$, discutere il quadro delle traiettorie descrivendone gli elementi fondamentali (eventuali equilibri e loro varietà stabili/instabili, alcune traiettorie non rettilinee).

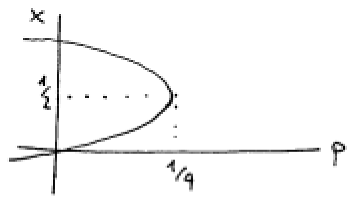
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\begin{cases} x(1-x) - p = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + p = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ → deve avere soluzione reale:

se $1 - 4p > 0$: $\exists$ 2 equilibri distinti: $\left(x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2} \;,\; y = 0 \right)$

se $1 - 4p = 0$: $\exists$ 1 equilibrio : $\left(x = \frac{1}{2} \;,\; y = 0 \right)$

se $1 - 4p < 0$: $\nexists$ equilibri



b) $J = \begin{vmatrix} 1-2x & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ se $1-4p > 0$: $1 - 2x = 1 - 2\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}\right) = \mp\sqrt{1-4p}$

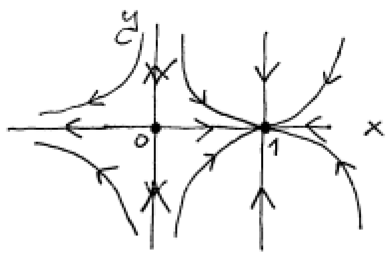
Dette $x' > x''$ le ascisse dei 2 eq., abbiamo x' ASINT. STABILE (nodo)

x'' INSTABILE (sella)

se $1-4p = 0$, $J = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$, non è possibile concludere nulla mediante linearizzazione.

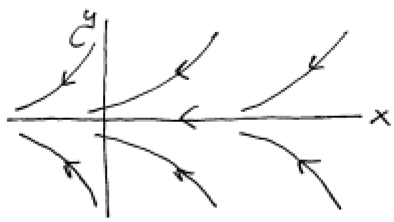
c) $p = 0$: equilibri : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $J = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

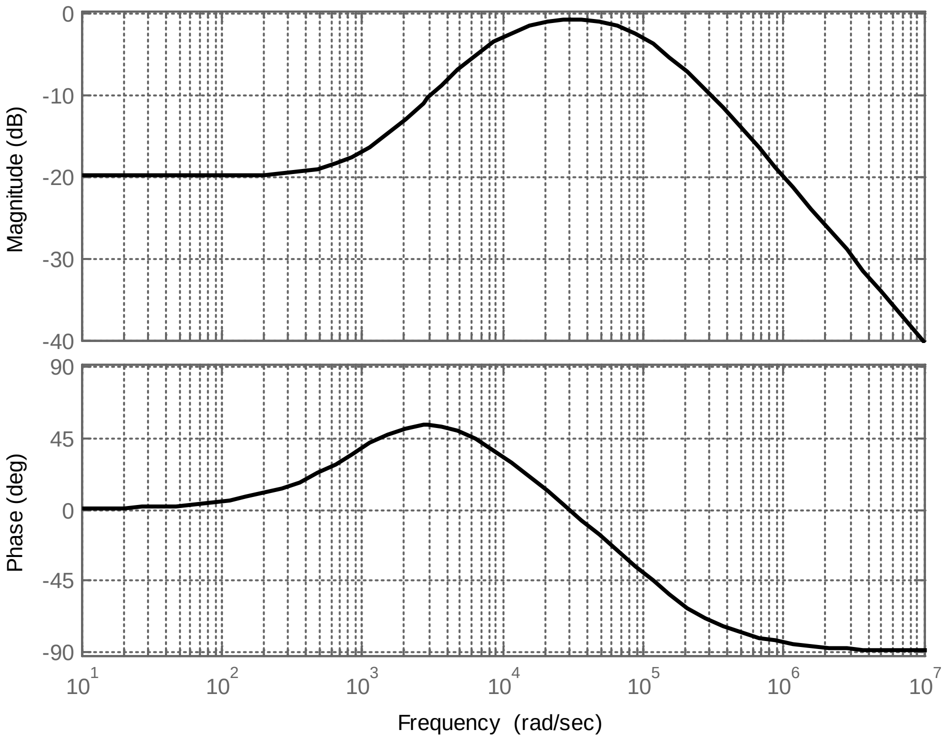


$p = 1$: $\nexists$ equilibri $y(t) = e^{-2t} y(0) \to 0$

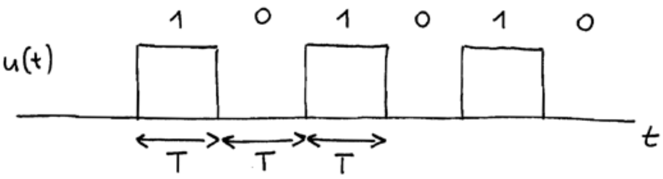
$\dot{x} = x(1-x) - 1 < 0 \;\; \forall x$



3)
I diagrammi di Bode in figura (modulo e fase) sono stati ricavati mediante una serie di prove effettuate su un'apparecchiatura per trasmissione dati.



L'apparecchiatura è utilizzata per la trasmissione di segnali digitali (sequenze di bit 0 o 1), un esempio dei quali (sequenza alternata ...101010...) è in figura. La durata di un bit (vedi figura) è pari a T secondi, per cui la frequenza di trasmissione (bit/secondo) è pari a $f = 1/T$.

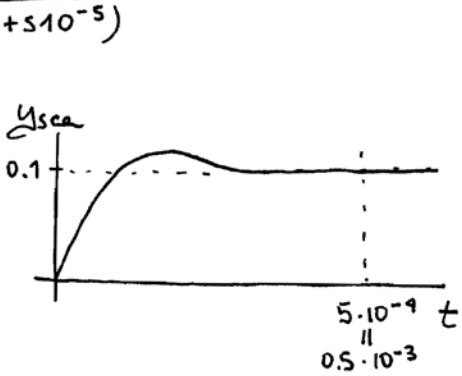


a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con le prove sperimentali sopra riportate.
b) Determinare (in modo qualitativo) e rappresentare graficamente la risposta allo scalino del sistema.
c) Determinare (in modo qualitativo) e rappresentare graficamente il segnale di uscita dell'apparecchiatura quando l'ingresso è la sequenza ...101010... in figura, nei casi in cui f=100, 1000, e 10000 (bit/secondo).

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $G(s) = 0.1 \dfrac{(1+s10^{-3})}{(1+s10^{-4})(1+s10^{-5})}$

b) Risposta allo scalino:



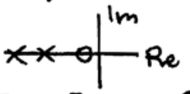
G(s) est. stabile:

$y_\infty = G(0) = 0.1$

$r = 1$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) > 0$

poli reali $\Rightarrow$ NO oscillazioni

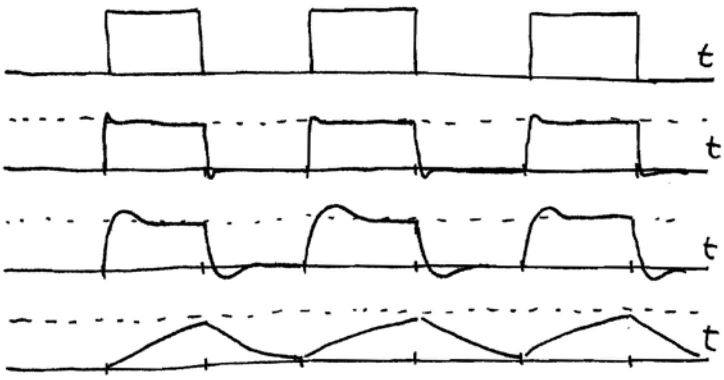
estremi



$N = 1$

$T_R \cong 5 T_D = 5 \cdot 10^{-4}$

c) Quindi:

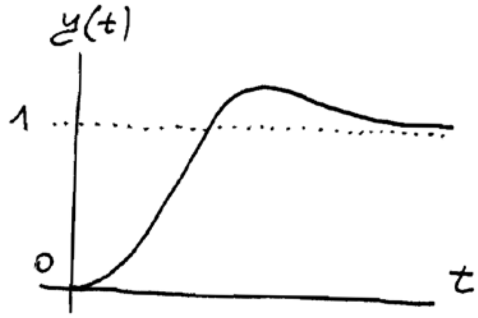


$f = 100$
$T = 10^{-2}$

$f = 1000$
$T = 10^{-3}$

$f = 1000$
$T = 10^{-4}$

4)



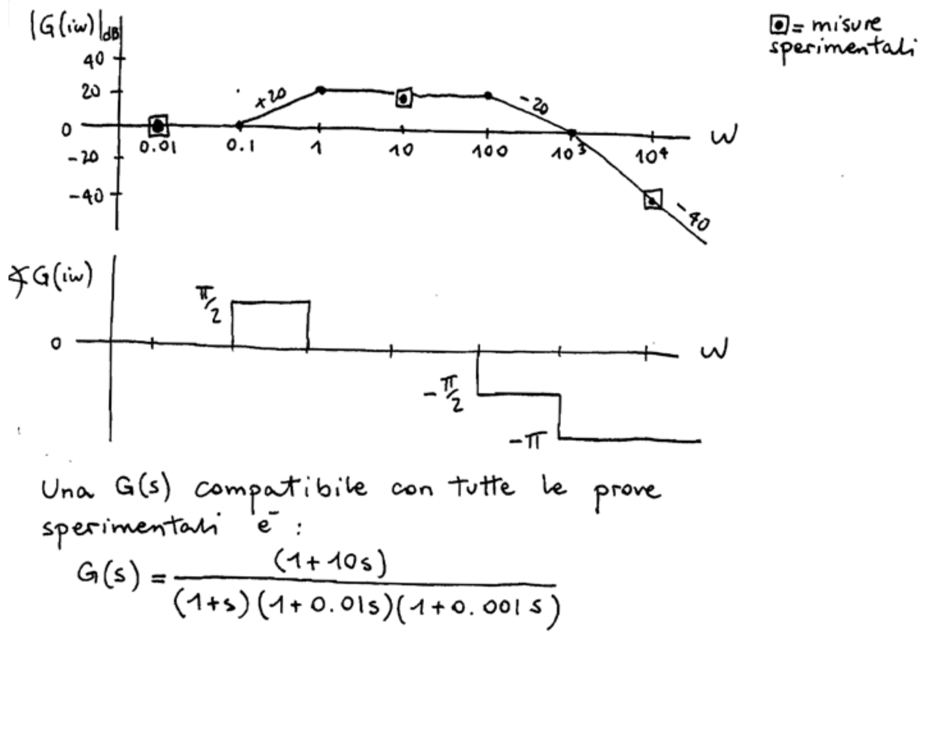
La risposta allo scalino rilevata sperimentalmente su un sistema è quella riportata in figura.
Si sono inoltre effettuate tre rilevazioni sperimentali applicando un ingresso sinusoidale del tipo $u(t) = U sin(\omega t)$ alle frequenze $\omega = 0.01; 10;\ 10^4$, ottenendo rispettivamente i valori 1; 10; 0.01 del rapporto di ampiezza uscita/ingresso a regime.

a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con le prove sperimentali, tracciandone inoltre i diagrammi di Bode di modulo e fase.
b) Determinare in modo qualitativo, e rappresentare graficamente, la risposta all'impulso del sistema.
c) Discutere la stabilità del sistema ottenuto con retroazione (negativa) unitaria di $G(s)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{y}(0) = 0$, quindi $r \geq 2$. Esiste uno zero superiore (1 estremo), quindi $n \geq 3$. Una possibile $G(s)$ sarà del tipo:

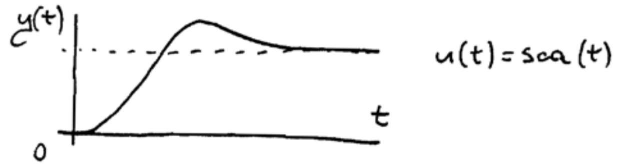
$$G(s) = \mu \frac{(1 + s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}, \quad \text{con } \mu = 1 .$$

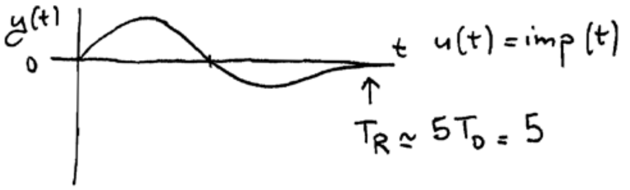


Una $G(s)$ compatibile con tutte le prove sperimentali è:

$$G(s) = \frac{(1+10s)}{(1+s)(1+0.01s)(1+0.001s)}$$

b) Derivo graficamente la risposta allo scalino:





c) Posso usare il criterio di Hurwitz per studiare la stabilità di $H(s) = G(s)/(1+G(s))$, oppure il criterio di Bode, poiché:

a) i poli di $G(s)$ hanno tutti $Re(p) \leq 0$

b) $|G(i\omega)| = 1$ solo in $\omega = 10^3 = \omega_c$ (NB: per $\omega \to 0$ $|G(i\omega)| \to 1$ ma lo raggiunge solo asintoticamente)

Allora:

1) $\mu > 0$

2) $\varphi_m = \pi - |\varphi_c| \cong \pi - |-3\pi/4| = \pi/4 > 0$

$\Rightarrow H(s)$ è asintoticamente stabile.

5)
***ATTENZIONE**: per questo quesito, discutere e motivare (sinteticamente ma rigorosamente) le SOLE risposte corrette, rifacendosi agli opportuni risultati teorici.*

I due sistemi A e B *<u>a tempo discreto</u>*, descritti dalle funzioni di trasferimento:

$$G_A = \frac{2(z-0.1)}{(z-0.5)(z+0.5)} \qquad G_B = \frac{2(z-0.2)}{(z-i0.5)(z+i0.5)}$$

[1] sono entrambi esternamente stabili
[2] sono entrambi instabili
[3] uno è instabile e l'altro esternamente stabile
[4] non vi è sufficiente informazione per discutere la stabilità

Il movimento libero dell'uscita
[1] è monotono per entrambi
[2] presenta oscillazioni per entrambi
[3] presenta oscillazioni per l'uno ma non per l'altro
[4] tende per entrambi al valore 2

6)
Per il sistema $\dot{x} = Ax$, $y = cx$, definire la nozione di stato non osservabile, di sottospazio di non osservabilità e di sistema completamente osservabile.

7)
In Matlab sono stati digitati i comandi

```
>>A=[10 5; 0 –2];
>>b=[0; 1];
```

Illustrare il risultato che si ottiene con il comando seguente, discutendo – per l'esempio specifico – quali conclusioni è possibile trarre sulle proprietà del sistema (A,b).

```
>>det(ctrb(A,b))
```

Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

5)
$|\text{poli}| < 1$ per entrambi i sistemi: entrambi sono quindi esternamente stabili ([1]).
Il sistema A ha un polo reale negativo, mentre B ha poli complessi: entrambi hanno quindi movimento libero oscillatorio ([2]).

6)

$\bar{x}$ è uno stato NON OSSERVABILE se l'uscita libera originata da $\bar{x}$ è identicamente nulla, cioè $y(t) = c\,\phi(t)\,\bar{x} = 0 \quad \forall t \geq 0$.
Il sottospazio di non osservabilità X_{NO} è l'insieme degli stati non osservabili.
Il sistema (A, c) è completamente osservabile se $X_{NO} = \{0\}$, coincide cioè con la sola origine di $\mathbb{R}^n$.

7)

ctrb(A,b) calcola la mat. di raggiungibilità

$$R = [b \;\; Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Quindi il comando riportato dà come risultato $\det R = -5$ che, essendo $\neq 0$, informa che (A, b) è completamente raggiungibile.