POLITECNICO
MILANO 1863

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 11/7/2018

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:_____

| 6 | 6 | 6 | 6 | 3 | 3 | 2 | | Voto totale 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

**ATTENZIONE !** - Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)
Un fondo previdenziale suddivide i propri aderenti in tre classi, in base alla loro età: (1) da 20 a 40 anni, (2) da 40 a 60 anni, (3) oltre 60 anni. Gli aderenti di classe (1) e (2) versano ogni anno al fondo, rispettivamente, 2000 e 3000 euro, mentre quelli di classe (3) percepiscono dal fondo $\beta$ euro all'anno. Ogni anno, una certa frazione $\alpha_{ij}$ di aderenti di classe *i* passa, per ragioni anagrafiche, alla classe *j* ($\alpha_{ii}$ è quindi la frazione che rimane nella classe *i*). I coefficienti $\alpha_{ij}$ sono riportati nella tabella seguente.

$$\left[\alpha_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Infine, ogni anno il fondo recluta un certo numero di nuovi aderenti, esclusivamente di classe (1).

a) Descrivere l'evoluzione nel tempo della popolazione degli aderenti al fondo previdenziale mediante un sistema a tempo discreto, in cui *u*(*t*) sia il numero di nuovi aderenti nell'anno $t$ e *y*(*t*) sia il numero complessivo di aderenti al fondo.
b) Studiare la stabilità del sistema dinamico proposto al punto 1.
c) Determinare, per ciascuna classe anagrafica, il numero di aderenti al fondo nel lungo periodo, nell'ipotesi che il numero di nuovi aderenti sia pari a 1000 ogni anno.

d) Aggiungere al modello un'ulteriore equazione di stato, la quale rappresenti l'evoluzione nel tempo della cassa del fondo previdenziale (nell'ipotesi che il capitale in cassa ad inizio anno benefici di un interesse bancario del 5%).
e) Determinare la quota $\beta$ erogabile annualmente agli aderenti di classe (3) nell'ipotesi che la popolazione sia nelle condizioni di equilibrio determinate al punto c), e si voglia mantenere costante la cassa del fondo previdenziale al valore di 1.000.000 euro.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_i(t)$ = n. aderenti di classe $i$ nell'anno $t$ , $i = 1, 2, 3$

$$x_1(t+1) = 0.9 x_1(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0.05 x_1(t) + 0.8 x_2(t)$$
$$x_3(t+1) = 0.1 x_2(t) + 0.6 x_3(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $A$ è triangolare : $\sigma(A) = \{0.9, 0.8, 0.6\}$

$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow A$ è ASINTOTICAMENTE STABILE

c) calcolo lo stato di equilibrio :

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_1 = 0.9\bar{x}_1 + 1000 \\ \bar{x}_2 = 0.05\bar{x}_1 + 0.8\bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 = 0.1\bar{x}_2 + 0.6\bar{x}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 10'000 \\ 2'500 \\ 625 \end{vmatrix}$$

d) $x_4(t)$ = capitale della cassa previdenziale all'inizio anno $t$

$$x_4(t+1) = 1.05\, x_4(t) + 2000\, x_1(t) + 3000\, x_2(t) - \beta\, x_3(t)$$

e) Impongo $x_4(t+1) = x_4(t) = 10^6$ e $|x_1 \ x_2 \ x_3| = |\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \bar{x}_3|$ :

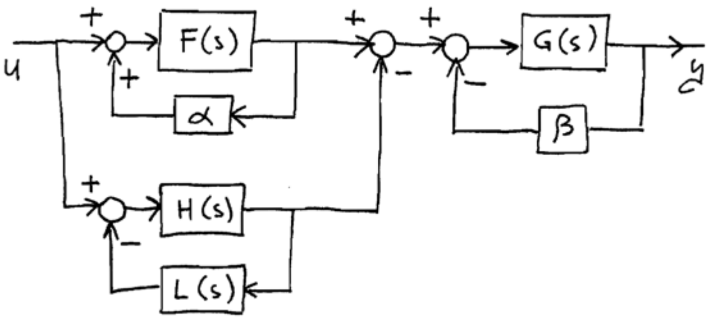
$$10^6 = 1.05 \cdot 10^6 + 2000 \cdot 10^4 + 3000 \cdot 2500 - \beta \cdot 625$$

$$\Rightarrow \beta = 44'080$$

2)
Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s - 1} \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 2} \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + \gamma s + 1} \quad L(s) = \frac{1}{s}$$

mentre $\alpha, \beta, \gamma$ sono coefficienti reali.




a) Discutere la asintotica stabilità dei singoli blocchi $F(s), G(s), H(s), L(s)$.
b) Determinare, motivando adeguatamente la risposta, per quali valori della terna $(\alpha, \beta, \gamma)$ il sistema aggregato in figura è asintoticamente stabile.
c) Determinare la funzione di trasferimento complessiva del sistema, esprimendola in funzione di $F, G, H, L, \alpha, \beta$.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

a) $F(s)$ : $\alpha_3 = -1 < 0 \Rightarrow$ F non asintoticamente stabile

$G(s)$ : $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha_1 = -2 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \alpha_2 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \lambda_i > 0 \Rightarrow$ G instabile

$H(s)$ : $\alpha_1, \alpha_2 > 0 \Leftrightarrow \gamma > 0 \Leftrightarrow$ H asintoticam. stabile per $\gamma > 0$

$L(s)$ : $\lambda = 0 \Rightarrow$ semplicemente stabile

b) $R_F = \frac{F}{1 - \alpha F} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s - 1 - \alpha}$ , $R_F$ asint. st. $\Leftrightarrow -5 < \alpha < -1$ (HURWITZ)

$R_G = \frac{G}{1 + \beta G} = \frac{1}{s^2 + 2s - 2 + \beta}$ , $R_G$ asint. st. $\Leftrightarrow \beta > 2$

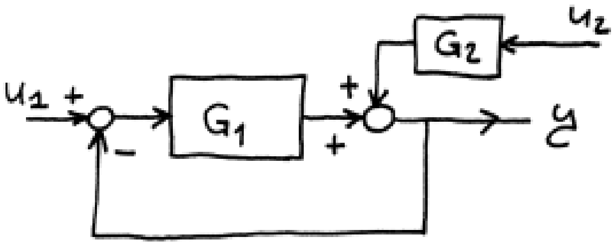
$R_{HL} = \frac{H}{1 + HL} = \frac{s}{s^3 + \gamma s^2 + s + 1}$ , $R_{HL}$ asint. st $\Leftrightarrow \gamma > 1$ (HURWITZ)

$R_F, R_G, R_{HL}$ sono collegati in cascata/parallelo. Quindi il sistema aggregato è asint. stab. $\Leftrightarrow$ lo sono $R_F, R_G, R_{HL}$, cioè se e solo se $-5 < \alpha < -1$, $\beta > 2$, $\gamma > 1$.

c) $R_{TOT} = (R_F - R_{HL}) \cdot R_G = \left( \frac{F}{1 - \alpha F} - \frac{H}{1 + HL} \right) \frac{G}{1 + \beta G}$

3)
Si consideri il sistema in figura, in cui

$$G_1(s) = \frac{6(s-0.5)}{(s-2)^2}\ , \qquad G_2(s) = \frac{1}{1+s}$$




a) Studiare la stabilità del sistema da ciascuno dei due ingressi.
b) Determinare (qualitativamente) l'andamento di $y(t)$ se $u_1(t) = sca(t)$ e $u_2(t) = sca(t-5)$ (=scalino applicato all'istante 5).

---

**Soluzione** [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $y = \frac{G_1}{1+G_1} u_1 + \frac{G_2}{1+G_1} u_2 \triangleq H_1 u_1 + H_2 u_2$

$$H_1 = \frac{\frac{6(s-0.5)}{(s-2)^2}}{1+\frac{6(s-0.5)}{(s-2)^2}} = \frac{6(s-0.5)}{(s-2)^2+6(s-0.5)} = \frac{6(s-0.5)}{(s+1)^2}\ , \quad Re(p_i)<0\ \forall i \Rightarrow \text{est. stab.}$$

$$H_2 = \frac{1}{1+s}\cdot\frac{1}{1+\frac{6(s-0.5)}{(s-2)^2}} = \frac{(s-2)^2}{(s+1)^3}\ , \quad Re(p_i)<0\ \forall i \Rightarrow \text{est. stab.}$$

b) Risposta a $u_1(t) = sca(t)$ $[u_2 \equiv 0]$

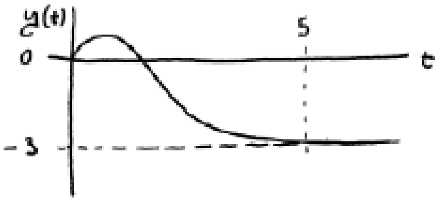
$y_\infty = H_1(0) = -3$

$r=1$ : $y(0) = 0$

$\dot{y}(0) = 6 > 0$

$T_R \simeq 5T_D = 5$

∄ oscillazioni




Risposta a $u_2(t) = sca(t)$ $[u_1 \equiv 0]$

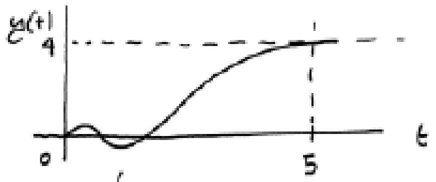
$y_\infty = H_2(0) = 4$

$r=1$ : $y(0) = 0$

$\dot{y}(0) = 1$

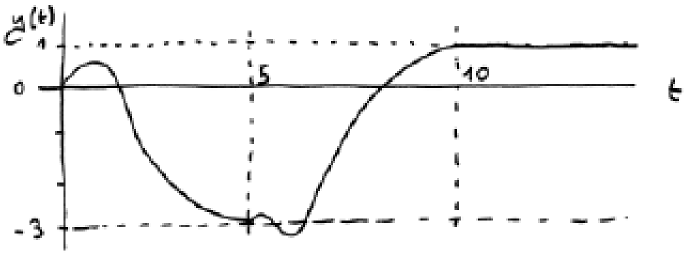
$T_R \simeq 5T_D = 5$

∄ oscillazioni




ricavato con Matlab...

Complessivamente $(u_1 = sca(t)\ ,\ u_2 = sca(t-5))$ :

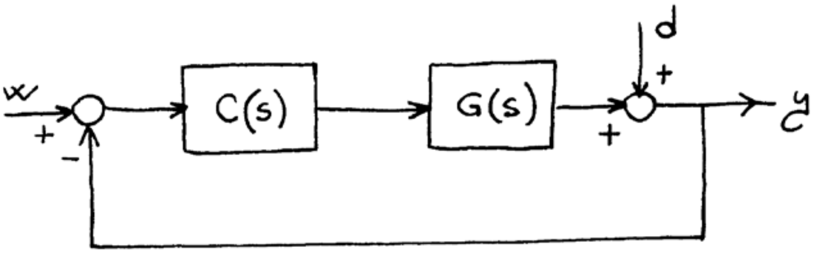


4)
Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui

$$C(s) = \mu \qquad\qquad G(s) = \frac{10(1-s)}{s(1+0.1s)}$$

a) Determinare un valore del coefficiente $\mu > 0$ che renda il sistema di controllo asintoticamente stabile, specificando i valori ottenuti per il margine di fase, la pulsazione critica ed il tempo di risposta del sistema di controllo.

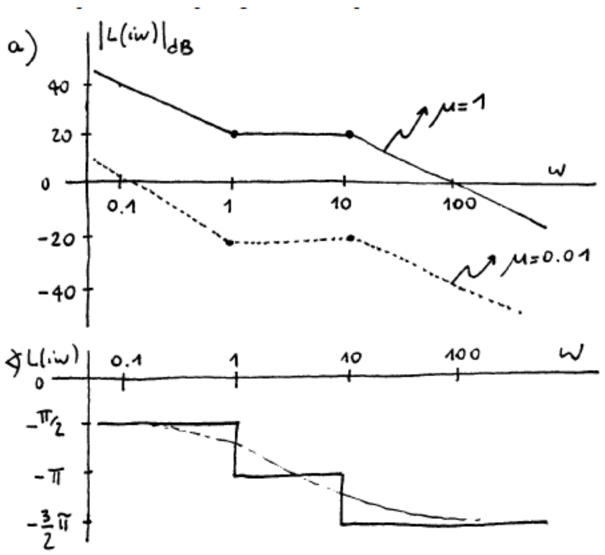
Utilizzando il valore di $\mu$ determinato al punto precedente:
b) Determinare l'errore a transitorio esaurito dovuto a un riferimento *w* costante.
c) Determinare l'errore a transitorio esaurito dovuto a un disturbo $d(t) = D\sin(100t)$.




---

**Soluzione** [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a)




$L(s) = \mu G(s)$

Scegliendo $\mu = 0.01$ si ottiene:

$\omega_c = 0.1$

$\varphi_c \cong -\pi/2$

$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| \cong \frac{\pi}{2} > 0$

$T_R \simeq \frac{5}{\omega_c} = 50$

b) $e_\infty$ dovuto a $w$ costante è nullo poichè $L(s)$ è di tipo 1 (possiede un polo nell'origine).

c) $e_\infty^d = |H(i100)| \cdot D \cdot \sin\left(100t + ∡H(i100)\right)$ dove $H(s) = -\frac{1}{1+L(s)}$

$\simeq 1 \cdot D \sin\left(100t + ∡H(i100)\right)$

5) E' dato il sistema $x(t+1) = f(x(t))$ ed è noto un suo equilibrio $\bar{x}$. Illustrare il metodo di linearizzazione per l'analisi della stabilità dell'equilibrio, specificando quali informazioni possono essere ricavate dall'uso di tale metodo.

6) Enunciare il criterio di stabilità di Hurwitz.

7) In Matlab, si vuole tracciare il grafico della risposta all'impulso del sistema definito da

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Qual è la sequenza di comandi da digitare?

**Risposte ai quesiti 5-6-7** [se necessario proseguire sul retro]:

5)

Metodo della linearizzazione: calcolo la matrice Jacobiana nell'equilibrio $\bar{x}$:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}} = \left|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{matrix}\right|_{\bar{x}}$$

Autovalori di $A$: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

Se $|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow \bar{x}$ è asintoticamente stabile.

Se $\exists i : |\lambda_i| > 1 \Rightarrow \bar{x}$ è instabile.

6)

Dato $\dot{x} = Ax$ con polinomio caratteristico

$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$

si costruisca la tabella di Hurwitz:

$$\underset{(n \times n)}{H} = \left|\begin{matrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & & & \end{matrix}\right|$$

ponendo $\alpha_i = 0$ se $i > n$.

$A$ è asintoticamente stabile se e solo se gli $n$ minori principali:

$D_1 = \alpha_1 \quad D_2 = \det \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{vmatrix} \quad \cdots \quad D_n = \det H$, sono positivi.

7)

```
>> A = [-1 2 ; 0 -2] ;
>> b = [0 ; 1] ;
>> c = [1 0] ;
>> sis = ss(A,b,c,0) ;
>> impulse (sis)
```