POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 8/9/2018

COGNOME:_______________________ NOME: _______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: _________________________

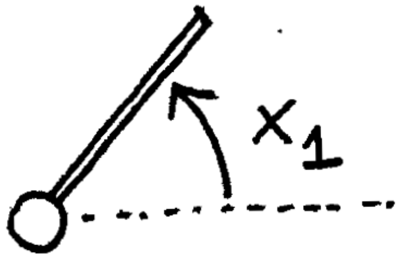
FIRMA: ______________________________________ Visto del docente:______

6	6	6	6	3	3	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Un braccio meccanico ruota nel piano orizzontale sotto l'azione di una coppia C proporzionale allo scostamento tra posizione angolare desiderata u ed effettiva x_1:



$$C(t) = k(u(t) - x_1(t))$$

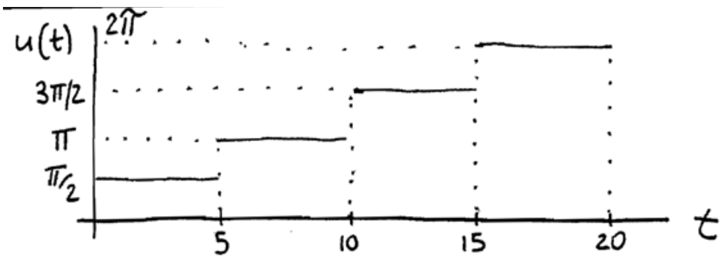
Il braccio ha momento d'inerzia M ed è inoltre soggetto ad attrito viscoso con coefficiente d'attrito h.

a) Scrivere le equazioni di stato e di uscita, considerando come variabile di uscita la posizione angolare del braccio meccanico.

b) Posti $M = 1$, $h = 4$, discutere la stabilità del sistema al variare di k ($-\infty < k < +\infty$).

c) Al sistema a riposo ($x = 0$) viene applicato l'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = \pi/2$ a partire da $t = 0$. Rappresentare graficamente, nello spazio di stato, la corrispondente traiettoria del sistema nei due casi $k = 2$ e $k = 8$.

d) Al sistema a riposo ($x = 0$) viene applicato l'ingresso in figura. Rappresentare graficamente, nello spazio di stato, la corrispondente traiettoria del sistema nel caso $k = 8$.



Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{M}\left(k(u - x_1) - h x_2\right)$

$y = x_1$

$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 0 \\ k/M \end{vmatrix}$

$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{h}{M}\lambda + \frac{k}{M} = \lambda^2 + 4\lambda + k = 0$

$\lambda = -2 \pm \sqrt{4-k}$

autovalori :

$\lambda = -2 \pm \sqrt{4-k}$, reali se $k \leq 4$

$\lambda = -2 \pm i\sqrt{k-4}$, complessi se $k > 4$

$k > 0 \Rightarrow Re(\lambda_{1,2}) < 0$, asint. stabile

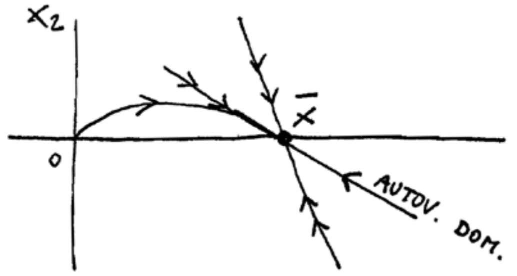
$k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$, sempl. stabile

$k < 0 \Rightarrow \det A < 0$, $\exists\, \lambda_i > 0$, instabile

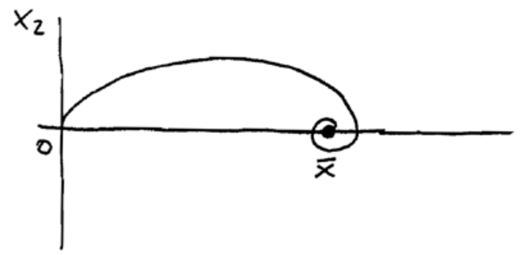
c) $\underline{K = 2}$, $\lambda = -2 \pm \sqrt{2}$

equilibrio : $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = u = \frac{\pi}{2} \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$

autovettori $Aw = \lambda w$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} w = \lambda w \Rightarrow w_2 = \lambda w_1$

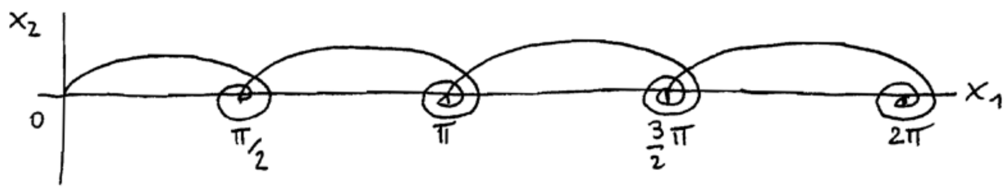


$\underline{K = 8}$, $\lambda = -2 \pm i\sqrt{2}$, $\bar{x} = \begin{vmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{vmatrix}$



verso di rotazione : per $x_2 = 0$, si ha $\dot{x}_2 > 0 \Leftrightarrow u - x_1 > 0$, cioè $x_1 < \bar{x}_1$

d) per $K = 8$, $T_D = -\frac{1}{2}$, $T_R \simeq -\frac{5}{2}$: il sistema raggiunge l'equilibrio $\bar{x}_1 = u$ prima che u cambi valore.



2) Si consideri il sistema a tempo continuo con

$$A = \begin{bmatrix} p & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Al variare di p ($-\infty < p < +\infty$), discutere

a) la stabilità del sistema;
b) il tempo di risposta;
c) l'esistenza di oscillazioni.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

La matrice A è triangolare a blocchi:

$$A = \left| \begin{array}{c:cc} p & 1 & 2 \\ \hdashline 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right| \qquad \lambda_1 = p \qquad A' = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda_{2,3} = -2 \pm i \Downarrow \mathrm{Re}(\lambda_{2,3}) < 0$$

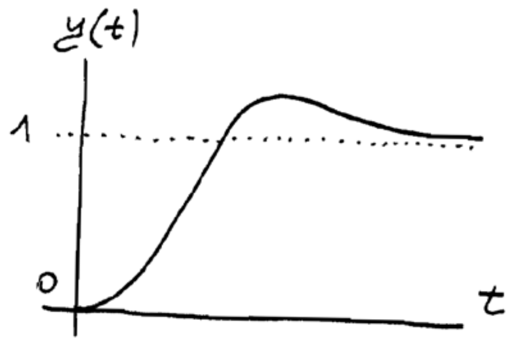
a) A è asint. st. $\forall p < 0$ (perché $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \ \forall i$). E' sempl. st per $p = 0$ (λ_1 ha $\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$, ed è radice semplice di $\Delta_A(\lambda)$). E' instabile per $p > 0$, perché $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$.

b) Il tempo di risposta va discusso quando $p < 0$ (sistema asintoticamente stabile). Se $-2 < p < 0$, λ_1 è aut. dominante: $T_R = 5 T_D = 5 \cdot \frac{1}{-p}$.

Se $p < -2$, $\lambda_{2,3}$ sono dominanti: $T_R = 5 T_D = 5 \cdot \frac{1}{+2} = 2.5$.

c) $\exists$ oscillazioni $\forall p$, poiché $\lambda_{2,3}$ sono complessi.

3) La risposta allo scalino rilevata sperimentalmente su un sistema è quella riportata in figura, con tangente orizzontale in $t = 0$. Si sono inoltre effettuate tre rilevazioni sperimentali applicando ingresso sinusoidale del tipo $u(t) = U sin(\omega t)$ alle frequenze $\omega = 0.01; 10;\ 10^4$, ottenendo rispettivamente i valori 1; 10; 0.01 del rapporto di ampiezza uscita/ingresso a regime.

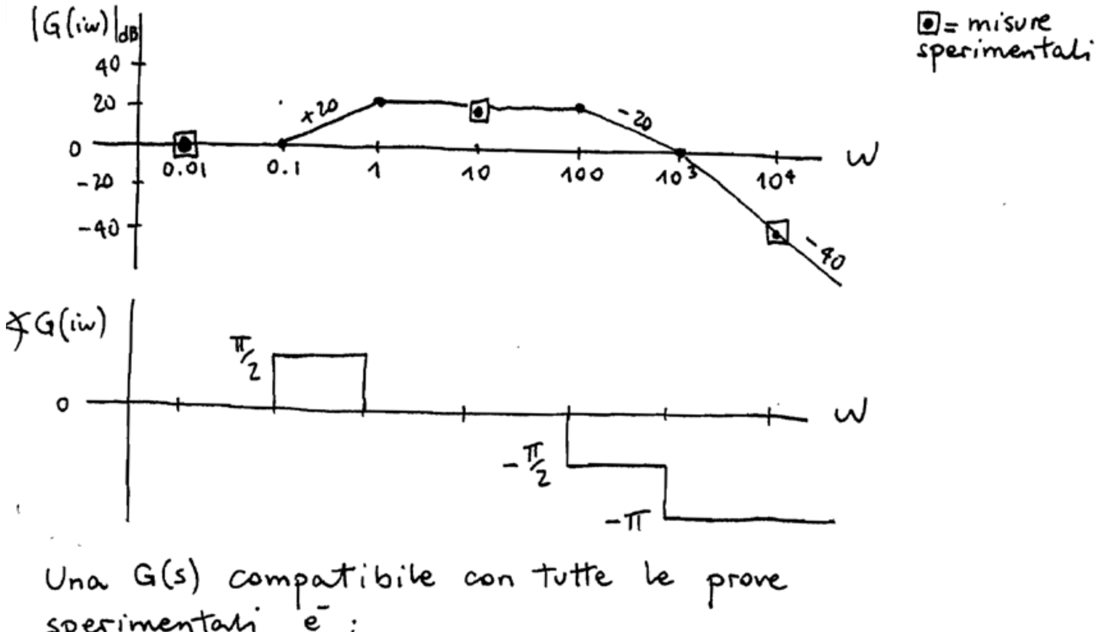


a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con le prove sperimentali, tracciandone inoltre i diagrammi di Bode di modulo e fase.
b) Determinare in modo qualitativo, e rappresentare graficamente, la risposta all'impulso del sistema.
c) Discutere la stabilità del sistema ottenuto con retroazione (negativa) unitaria di $G(s)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{y}(0) = 0$, quindi $r \geq 2$. Esiste uno zero superiore (1 estremo), quindi $n \geq 3$. Una possibile $G(s)$ sarà del tipo:

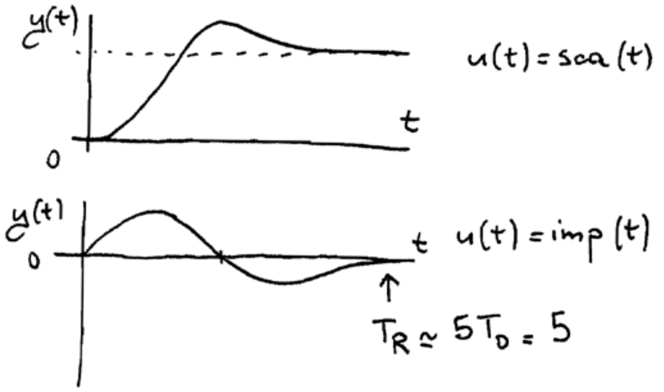
$$G(s) = \mu \frac{(1+s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}, \quad \text{con } \mu = 1 .$$



Una $G(s)$ compatibile con tutte le prove sperimentali è:

$$G(s) = \frac{(1+10s)}{(1+s)(1+0.01s)(1+0.001s)}$$

b) Derivo graficamente la risposta allo scalino:



c) Posso usare il criterio di Hurwitz per studiare la stabilità di $H(s) = G(s)/(1+G(s))$, oppure il criterio di Bode, poiché:

a) i poli di $G(s)$ hanno tutti $Re(p) > 0$

b) $|G(i\omega)| = 1$ solo in $\omega = 10^3 = \omega_c$ (NB: per $\omega \to 0$ $|G(i\omega)| \to 1$ ma lo raggiunge solo asintoticamente)

Allora:

1) $\mu > 0$

2) $\varphi_m = \pi - |\varphi_c| \cong \pi - |-135°| \simeq 45° > 0$

$\Rightarrow H(s)$ è asintoticamente stabile.

4) Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2$$
$$y = x_2$$

a) Studiarne la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità.
b) Progettare un ricostruttore asintotico dello stato tale che l'errore di stima vada a zero (approssimativamente) in 0.1 unità di tempo.
c) Progettare una legge di controllo tale che il sistema controllato (sistema + ricostruttore dello stato progettato al punto precedente + legge di controllo) abbia un tempo di risposta pari (approssimativamente) a 1 unità di tempo.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$

Stabilità: $\mathrm{tr}\, A = 2 > 0 \Rightarrow A$ instabile

Raggiungibilità: $R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ $\quad \det R \neq 0$
$\Rightarrow (A, b)$ compl. ragg.

Osservabilità: $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \det \mathcal{O} \neq 0$
$\Rightarrow (A, c)$ compl. oss.

b) $T_D = \frac{0.1}{5} = 0.02 \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_D) = -\frac{1}{0.02} = -50$; impongo $\sigma_{A+\ell c} = \{-50, -50\}$

$A + \ell c = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+\ell_1 \\ -2 & 1+\ell_2 \end{vmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tr}(A+\ell c) &= 1 + (1+\ell_2) = -50 - 50 \\ \det(A+\ell c) &= (1+\ell_2) + 2(2+\ell_1) = (-50)\times(-50) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \ell_1 &= 2597/2 \\ \ell_2 &= -102 \end{aligned}$$

c) $T_D = 1/5 = 0.2 \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_D) = -\frac{1}{0.2} = -5$; impongo $\sigma_{A+bk} = \{-5, -5\}$

$A + bk = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+k_1 & 2+k_2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tr}(A+bk) &= 1 + k_1 + 1 = -5 - 5 \\ \det(A+bk) &= (1+k_1) + 2(2+k_2) = (-5)\times(-5) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k_1 &= -12 \\ k_2 &= 16 \end{aligned}$$

ATTENZIONE*: per il quesito 5), discutere e motivare (sinteticamente ma rigorosamente) la risposta (positiva o negativa) a TUTTE le affermazioni proposte, rifacendosi agli opportuni risultati teorici.*

5) Un sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$ di ordine $n = 3$ ha uno stato di equilibrio $\bar{x}$ il cui Jacobiano ha autovalori $\{-1; 1+i; 1-i\}$. Sulla base di queste sole informazioni, è possibile affermare con certezza che:

[1] Qualunque traiettoria del sistema diverge ($|x(t)| \to \infty$ per ogni $x(0)$).

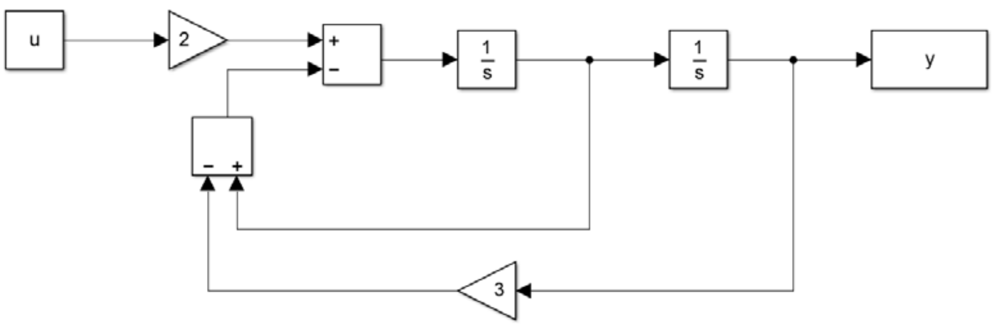
[2] Esiste un intorno $I(\bar{x}) = \{x \; tali \; che |x - \bar{x}| < \varepsilon\}$ di $\bar{x}$ da cui partono traiettorie divergenti ($|x(t)| \to \infty$).

[3] Esiste un intorno $I(\bar{x})$ di $\bar{x}$ da cui partono traiettorie che escono da $I(\bar{x})$.

[4] Esiste un intorno $I(\bar{x})$ di $\bar{x}$ da cui tutte le traiettorie tendono a $\bar{x}$.

6) Enunciare il criterio di Bode per la stabilità di un sistema di controllo.

7) Scrivere il modello ingresso/uscita (sia in forma di equazione differenziale che di funzione di trasferimento) corrispondente allo schema Simulink sotto riportato.



Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

5) Gli autovalori ci dicono che $\bar{x}$ è INSTABILE ($\exists i : Re(\lambda_i) > 0$).
La [3] è quindi VERA, per definizione di instabilità alla Liapunov ("locale").
La [2] non è detto che sia vera, perché le traiettorie che escono da $I(\bar{x})$ non necessariamente divergono (p.e. possono tendere a un altro equilibrio); a maggior ragione non è detto sia vera la [1], lo Jacobiano ci dà informazioni solo sul comportamento locale.
La [4] è falsa perché l'equilibrio è instabile, quindi esistono traiettorie che partono arbitrariamente vicino a $\bar{x}$ e se ne allontanano.

6) Dato un sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello $L(s)$, supponiamo che:

1) tutti i poli di $L(s)$ hanno $Re(p_i) \leq 0$;
2) $\exists!\ \omega = \omega_c$ tale che $|L(i\omega)| = 1$;

Allora il sistema di controllo è asintoticamente stabile se e solo se

a) $\mu > 0$, dove μ è il guadagno generalizzato di $L(s)$

b) $\varphi_m > 0$, dove $\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi - |\measuredangle L(i\omega_c)|$

7)

$\ddot{y} + \dot{y} - 3y = 2u$

$G(s) = \dfrac{2}{s^2 + s - 3}$