POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 11/1/2019

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

6	6	6	6	3	3	2		Voto totale 32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) In una popolazione di insetti ciascun individuo vive esattamente 3 settimane. Alla fine della *seconda* settimana di vita avviene la riproduzione, durante la quale ogni individuo depone in media f uova. La probabilità di sopravvivenza nella prima settimana di vita vale 0.001, nelle successive due settimane vale 0.1.

a) Descrivere la popolazione con un modello a classi d'età.
b) Discutere la stabilità del sistema al variare di $f > 0$.
c) Discutere l'esistenza di oscillazioni nel movimento libero.
d) Introdurre nel modello una variabile d'ingresso che descriva l'immigrazione di adulti (seconda e terza classe d'età) dall'esterno, supponendo gli adulti immigrati si distribuiscano alla pari nelle due classi d'età relative, e una variabile di uscita che rappresenti il numero di uova deposte.
e) Determinare la funzione di trasferimento e il modello ingresso/uscita in forma di predizione.

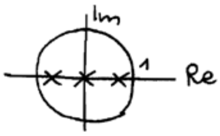
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_i(t)$ = n. individui che compie i settimane all'istante t

$$x_1(t+1) = 0.001\, f\, x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = 0.1\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = 0.1\, x_2(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 10^{-3}f & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{vmatrix}$$

b) $\Delta_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 10^{-4} f)$



$\sigma_A = \{0, \pm 10^{-2}\sqrt{f}\}$

A asint. stabile $\Leftrightarrow 10^{-2}\sqrt{f} < 1 \Leftrightarrow f < 10^4$

A instabile $\Leftrightarrow f > 10^4$

A semplic. stabile $\Leftrightarrow f = 10^4$

(gli autovalori con $|\lambda| = 1$ sono semplici)

$\exists\ \lambda$ reale $< 0 \Rightarrow$ oscillazioni nel movimento libero

c) $$A = \begin{vmatrix} 0 & 10^{-3}f & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{vmatrix}$$

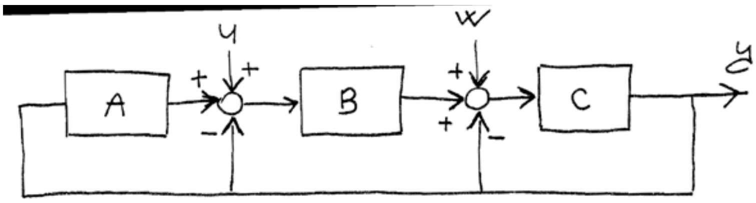
$$c = \begin{vmatrix} 0 & f & 0 \end{vmatrix}$$

d) $$\left.\begin{aligned} z x_1 &= 10^{-3} f x_2 \\ z x_2 &= 0.1\, x_1 + 0.5\, u \\ z x_3 &= 0.1\, x_2 + 0.5\, u \\ y &= f x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad G(z) = \frac{0.5 f z}{z^2 - 10^{-4} f}$$

$$y(t) = 10^{-4} f\, y(t-2) + 0.5 f (u(t-1))$$

(NB: perdita di grado in $G(z)$, poiché x_3 non influenza y né direttamente né indirettamente)

2) Si consideri il sistema in figura, in cui il blocco B ha funzione di trasferimento $B(s) = 1/(s+2)$, il blocco C è un integratore, e il blocco A moltiplica per 2 il segnale d'ingresso.



a) Determinare le funzioni di trasferimento tra i due ingressi u e w e l'uscita y.
b) Discutere la stabilità delle funzioni di trasferimento determinate al punto precedente.
c) Determinare (qualitativamente) l'andamento dell'uscita a fronte degli ingressi $u(t) = sca(t)$ e $w(t) = -sca(t-15)$.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $$y = C\left(w - y + B\left(u - y + Ay\right)\right)$$

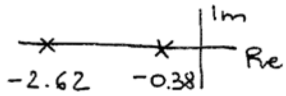
$$y\left(1 + C + CB - CBA\right) = BCu + Cw$$

$$y = \underbrace{\frac{BC}{1 + C + CB - CBA}}_{G(s)} u + \underbrace{\frac{C}{1 + C + CB - CBA}}_{H(s)} w$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s+2)}} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s+2)}} = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 1}$$

b) poli : $s = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$



G e H sono asintoticamente stabili,
poli reali, $T_D \simeq 2.6$, $T_R \simeq 13.1$

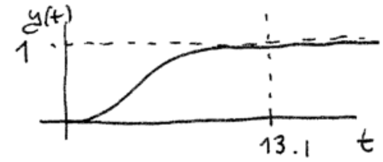
c) Risposta allo scalino di G(s) :

$y_\infty = G(0) = 1$

$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{array}\right\} r = 2$

$\ddot{y}(0) = 1 > 0$

NO estremi

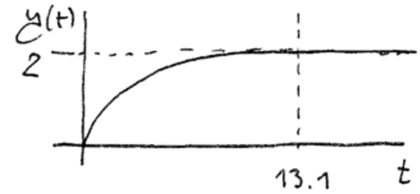


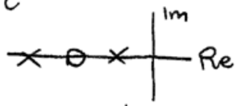
Risposta allo scalino di H(s) :

$y_\infty = H(0) = 2$

$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \end{array}\right\} r = 1$

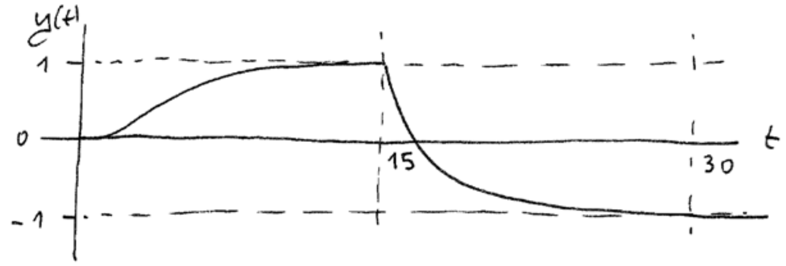
$\dot{y}(0) = 1 > 0$





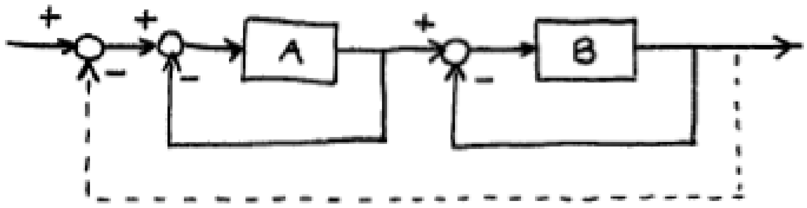
1 zero bene inquadrato,
$\Rightarrow$ NO estremi

Risposta complessiva :



3) Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui il blocco A è un integratore ed il blocco B è descritto dal modello I/O

$$\ddot{y}_B + 2\dot{y}_B + 11y_B = \dot{u}_B.$$



Si consideri dapprima il sistema SENZA il collegamento tratteggiato:

a) Verificare che il sistema è asintoticamente stabile.

b) Determinare il tempo di risposta e discutere l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.

Si consideri ora il sistema CON il collegamento tratteggiato:

c) Determinare la funzione di trasferimento complessiva del sistema, esprimendola in funzione delle funzioni di trasferimento G_A e G_B dei blocchi A e B.

d) Discutere la stabilità del sistema.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

<u>Traccia della soluzione:</u>

a) Indicando con R_A (risp. R_B) la retroazione unitaria di A (risp. B), il sistema è formato dalla cascata di R_A e R_B. Quindi sarà asintoticamente stabile se e solo se lo sono R_A e R_B.

R_A: $G_{RA} = \dfrac{G_A}{1+G_A} = \dfrac{1/s}{1+1/s} = \dfrac{1}{1+s}$ $\quad s=-1$: asint. stabile

R_B: $G_{RB} = \dfrac{G_B}{1+G_B} = \left(\dfrac{s}{s^2+2s+11}\right) \Big/ \left(1+\dfrac{s}{s^2+2s+11}\right) = \dfrac{s}{s^2+3s+11}$

$s = \dfrac{-3\pm\sqrt{9-44}}{2} = -\dfrac{3}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{35}}{2}$

asint. stabile

Il sistema è quindi asintoticamente stabile.

b) $\exists$ poli complessi $\Rightarrow$ $\exists$ oscillazioni

$\lambda_{dom} = -1$: $T_D = 1$ $\quad T_R \simeq 5T_D = 5$

c) $$G = \frac{G_{RA}G_{RB}}{1+G_{RA}G_{RB}} = \frac{\frac{G_AG_B}{(1+G_A)(1+G_B)}}{1+\frac{G_AG_B}{(1+G_A)(1+G_B)}} = \frac{G_AG_B}{1+G_A+G_B+2G_AG_B}$$

d) $$G = \frac{\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s^2+2s+11}}{1+\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2s+11}+\frac{2}{s^2+2s+11}}$$; svolgendo i calcoli, otteniamo $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$, con

$D(s) = s^3+4s^2+15s+11$

Hurwitz: $H = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 11 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}$

$4 > 0$ ok

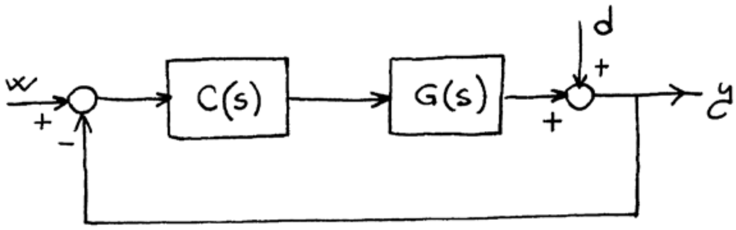
$4\cdot 15 - 1\cdot 11 > 0$ ok

$11\,(4\cdot 15 - 1\cdot 11) > 0$ ok

Anche questo sistema è asintoticamente stabile.

4) Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui

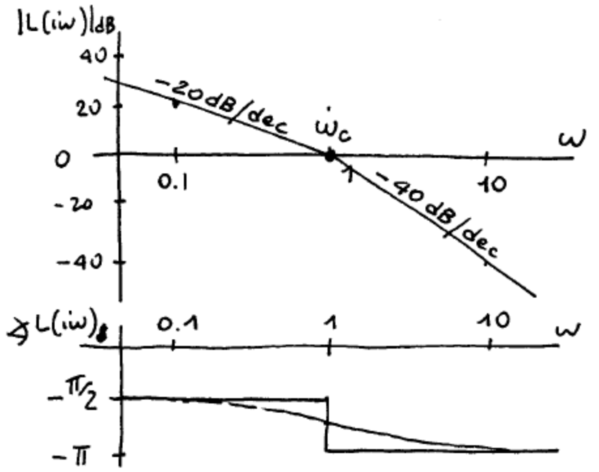
$$C(s)=\frac{0.1}{s} \qquad G(s)=\frac{10}{s+1}$$



a) Discutere la stabilità del sistema di controllo, determinando il valore della pulsazione critica e del margine di fase.
b) Determinare (anche in modo approssimato) la banda passante ed il tempo di risposta del sistema di controllo.
c) Determinare l'errore a regime quando $w(t)=sca(t)$, $d(t)=0.5sca(t)+0.1\sin(0.1t)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $L(s)=C(s)G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$



$\omega_c \cong 1$

$\varphi_c \simeq -135°$

$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| \simeq 45° > 0$

Il sistema di controllo è asintoticamente stabile.

b) $BP \simeq (0,\omega_c) = (0,1)$

$T_{RISP} \simeq 5\dfrac{1}{\omega_c} = 5$

c) Poiché la $L(s)$ contiene un integratore (cioè è di tipo $g=1$), riferimento e disturbo costanti danno luogo a errore a regime NULLO. Si tratta quindi di analizzare solo l'effetto di

$d(t)=0.1\sin(0.1t)$

$$H_{d\to e}=-\frac{1}{1+L} \qquad |H(i\omega)|=\frac{1}{|1+L(i\omega)|}\cong\begin{cases}1=0\text{dB}, & \text{se } |L(i\omega)|\gg 1\\ \dfrac{1}{|L(i\omega)|}=-|L(i\omega)|_{dB}, & \text{se } |L(i\omega)|\ll 1\end{cases}$$

Quindi

$$e(t)\cong 0.1\frac{1}{|L(i0.1)|}\sin(0.1t+\varphi)=0.01\sin(0.1t+\varphi)$$

5) Con riferimento al sistema dinamico lineare (A, b, c, d), si definiscano i concetti di sistema asintoticamente stabile, semplicemente stabile, instabile, sulla base del movimento libero del sistema.

6) Si consideri un sistema lineare asintoticamente stabile, con costante di tempo dominante $T_d = 3$ secondi. Se al sistema viene applicato l'ingresso $u(t) = 10\sin(2t)$, a regime

- [1] l'uscita vale 0, qualunque sia il sistema
- [2] l'uscita vale 0, se e solo se il sistema ha guadagno $\mu = 0$
- [3] l'uscita è una sinusoide di pulsazione $\omega = 2$, per ogni $x(0)$
- [4] l'uscita è una sinusoide di pulsazione $\omega = 2\pi/2$, per ogni $x(0)$

(*scegliere - e motivare - la risposta corretta*)

7) Illustrare i comandi Matlab per simulare l'andamento dell'uscita del sistema dinamico

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + 3u(t)$$

partendo dalla condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$, su un orizzonte di $T = 10$ unità di tempo, con ingresso costante $u = 2$.

Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

5)

A è asintoticamente stabile se il mov. libero $\to 0$ $\forall x(0)$.

A è semplicemente stabile se il mov. libero è limitato $\forall x(0)$ ma, per qualche $x(0)$, non tende a 0.

A è instabile se il mov. libero è illimitato per qualche $x(0)$.

6)

Per il teorema della risposta in frequenza, applicando un ingresso sinusoidale a un sistema asintoticamente stabile otteniamo, a transitorio esaurito, un'uscita sinusoidale della medesima frequenza, qualunque sia $x(0)$. Quindi la risposta corretta è la [3].

7)

```
sys = ss([-1,1; 2,0.5], [1;0], [2,-1], 3, 1);
lsim(sys, 2*ones(11,1), 0:10, [-1; 2])
```