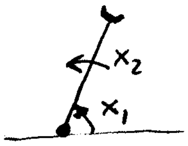
Regolazione della posizione dell'antenna



$\exists$ attrito viscoso

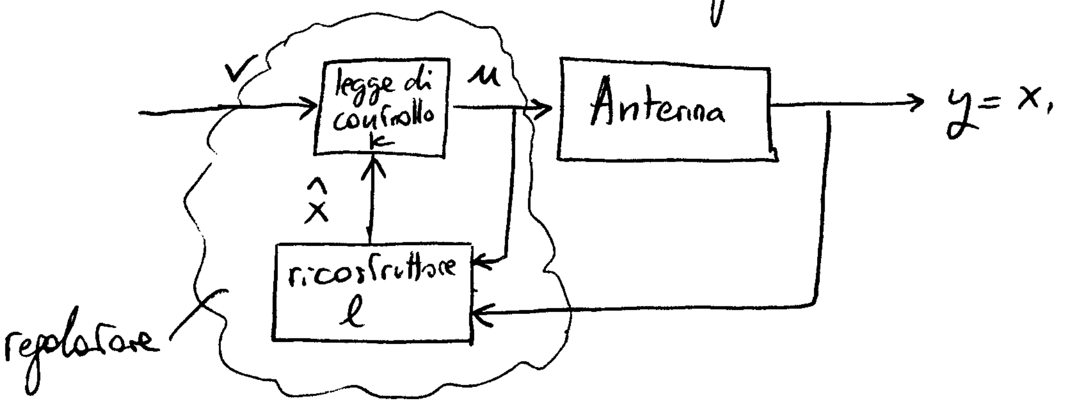
J = momento di inerzia

x_1 = posizione angolare

x_2 = velocità angolare

$y = x_1$

Misurando solo y voglio progettare un regolatore (legge di controllo k + ricostruttore ℓ), che porti l'antenna in una posizione desiderata $\bar{v}$ e velocità nulla (antenna ferma) in 5 unità di tempo.



Antenna:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}(u - h x_2)$$

$$y = x_1$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$ det $\Theta \neq 0 \Rightarrow$ CO $\Rightarrow$ a partire dalle misure di u e y posso ricostruire x con dinamica arbitraria

$$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & -\frac{h}{J^2} \end{vmatrix}$$ det $R \neq 0 \Rightarrow$ CR $\Rightarrow$ posso progettare una legge di controllo con dinamica arbitraria

OSSERVAZIONE

Legge di controllo $u = k\hat{x} + v$

$$\dot{x} = Ax + bu = Ax + bk\hat{x} + bv$$

A regime $\hat{x} = x$ (posso progettare l / $A + lc$ è asintoticam. stabile $\Rightarrow \hat{x} \to x$) e quindi, a regime,

$$\dot{x} = Ax + bkx + bv = (A+bk)x + bv$$

Potendo progettare k / $A+bk$ sia asint. stab, all'equilibrio sarà $\dot{x}=0$ cioè
Noto k, dovrà essere $(A+bk)\begin{vmatrix}\bar{V}\\0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\\frac{1}{J}\end{vmatrix} V = 0$ da cui ricaverò v!

Determiniamo, per esempio nel caso $J=1$ $h=1$, un regolatore che esaurisce i transitori in 5 unità di tempo

$$\Delta_{reg} = \Delta_{A+bk} \cdot \Delta_{A+lc} =$$
$$= (\lambda+1)^2 (\lambda+1)^2$$

$$\left(\begin{array}{c} 5T_d = 5 \\ T_d = 1 \\ -\mathrm{Re}(\lambda_d) = -1 \end{array}\right)$$

$$A + bk = \begin{vmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}k_1 & k_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1\\k_1 & -1+k_2\end{vmatrix}$$

$tr = -1 + k_2 = -2$
$det = -k_1 = 1$

$$k = \begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}^T$$

$$A + lc = \begin{vmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}l_1\\l_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}l_1 & 1\\l_2 & -1\end{vmatrix}$$

$tr = l_1 - 1 = -2$
$det = -l_1 - l_2 = 1$

$$l = \begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$$

$$(A+bk)\begin{vmatrix}\bar{V}\\0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & -2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\bar{V}\\0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix} v = 0 \Rightarrow -\bar{V} + v = 0$$

$$v = \bar{V}$$

posizione desiderata

$$u = k\hat{x} + v = (\bar{V} - \hat{x}_1) + (0 - \hat{x}_2) \; !$$

Retroazione STATICA dall'uscita

$u = k y$: misuro solo $y = x_1$, ma non ricostruisco x_2.

$\underset{\text{scalare}}{k}$ Cosa riesco a fare?

$$\dot{x} = Ax + bu = Ax + b(ky) = Ax + bkcx$$
$$= \underbrace{(A + bkc)}\, x$$

è la matrice di stato del sistema controllato.
Nell'esempio:

$$A + bkc = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1/J \end{vmatrix} k \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ k/J & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k/J & -h/J \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A + bkc) = -\frac{h}{J} < 0$$

$$\det(A + bkc) = -\frac{k}{J}, \quad > 0 \text{ purché } k < 0$$

E' possibile (IN QUESTO ESEMPIO) rendere il sistema controllato asintoticamente stabile; ma NON E' possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori. Infatti:

$$\Delta_{A+bkc}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{h}{J}\lambda - \frac{k}{J} = 0 \implies \lambda = \frac{-\frac{h}{J} \pm \sqrt{\frac{h^2}{J^2} + 4\frac{k}{J}}}{2}$$

Dato il sistema a tempo continuo

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

studiarne la stabilità asintotica e la stabilità esterna.

Stabilità asintotica: A è triangolare a blocchi:

$$A = \left|\begin{array}{c:cc} 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right| \qquad \sigma(A) = \{2\} \cup \sigma(A_2) \longrightarrow A \text{ è INSTABILE}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \operatorname{tr} A_2 = -2 < 0 \\ \det A_2 = 2 > 0 \end{array}\right\} A_2 \text{ asint. stab.}$$

Ricavo la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} sX_1 &= -2X_1 + X_3 \\ sX_2 &= -X_2 + X_3 \\ sX_3 &= -X_2 - X_3 + u \\ y &= X_1 \end{aligned} \implies G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

$$\{\text{poli}\} = \{+2, -1 \pm i\}$$

$$\operatorname{Re}(p_i) < 0 \quad \forall i$$

$$\Downarrow$$

sistema esternamente stabile

$$\text{grado}\left[\text{den}\left[G(s)\right]\right] = 3 = n$$

$$\Updownarrow$$

Σ compl. raggiung. & compl. osservabile

$$\Updownarrow$$

$$\{\text{poli}\} = \{\text{autovalori}\} = \sigma(A)$$

$$\Updownarrow$$

Σ ASINT. STAB. $\Longleftrightarrow$ Σ ESTERN. STAB.

Si dimostri che la rete elettrica in figura non è asintoticamente stabile ma è esternamente stabile

$\Updownarrow$

y for limitata per u limitat

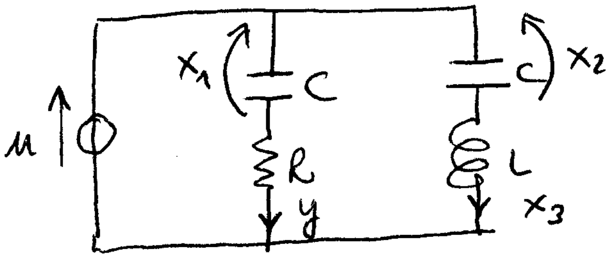
$\Updownarrow$

$\mathrm{Re}(\text{poli}) < 0$

$\Updownarrow$

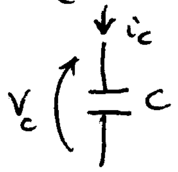
$A.S \rightarrow E.S.$ $(\{\lambda\} \supseteq \{\text{poli}\})$

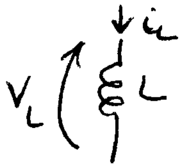
$\not\leftarrow$



$i_c = C\,\dot{v}_c$

$V_L = L\,\dot{i}_L$





$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left[\frac{u - x_1}{R}\right]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[x_3\right]$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L}\left[u - x_2\right]$$

$$y = \frac{u - x_1}{R}$$

$$A = \begin{vmatrix} \overset{\mathrm{Re}<0}{-\frac{1}{RC}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{vmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $tr = 0$

$\det = \frac{1}{LC}$

$$\lambda = \pm \frac{i}{\sqrt{LC}}$$

$\Longrightarrow$ A è semplicemente ~~in~~stabile

Calcolo f.d.t

$$Ry = u - x_1 \longrightarrow Ry = u - \frac{u}{sRC+1}$$

$$sRCx_1 = u - x_1 \rightarrow x_1 = \frac{u}{sRC+1}$$

$$R(sRC+1)y = sRC\,u \Rightarrow G(s) = \frac{s\cancel{R}C}{\cancel{R}(sRC+1)}$$

polo in $-\frac{1}{RC} \longrightarrow$ stabilità esterna

(NB) La stabilità esterna dipende dalla scelta di y!

Esempio : $y = x_3$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left[\frac{u - x_1}{R}\right]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[x_3\right] \longrightarrow sCx_2 = x_3 \rightarrow x_2 = \frac{x_3}{sC}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L}\left[u - x_2\right] \longrightarrow Lsx_3 = u - x_2 \rightarrow Lsx_3 = u - \frac{x_3}{sC}$$

$$y = x_3$$

$$x_3 = \frac{usC}{s^2LC+1} \Rightarrow y = \frac{sC}{s^2LC+1}u$$

$$\tilde{G}(s) = \frac{sC}{s^2LC+1} \longrightarrow \text{poli in } \pm\frac{i}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \text{non è esternamente stabile}$$