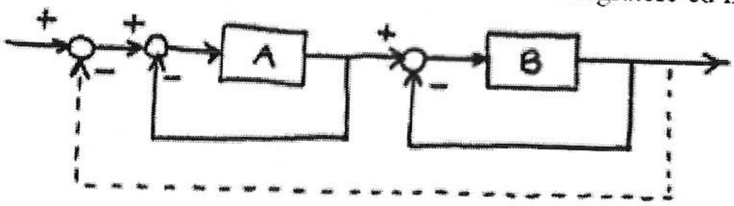
1)
**I telefoni cellulari diffusi tra la popolazione si possono suddividere in "Ultima Generazione (UG)" (immessi sul mercato da meno di 1 anno), "Penultima Generazione (PG)" (da 1 a 2 anni) e "Altre Generazioni (AG)" (oltre 2 anni).**
**Ogni anno, una nuova generazione compare sul mercato, il 30% dei cellulari UG, il 50% dei PG, e l'80% dei AG si guasta e viene eliminato. Tutti i nuovi cellulari venduti sono UG.**

**a) Descrivere l'evoluzione nel tempo dell'insieme dei telefoni cellulari mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui $u(t)$ rappresenta il numero di nuovi cellulari venduti nell'anno $t$ e $y(t)$ il numero complessivo di cellulari esistenti.**
**b) Determinare il modello ingresso/uscita.**

**UTILIZZANDO IL MODELLO INGRESSO/USCITA:**
**c) Studiare la stabilità del sistema.** e il tempo di risposta.
**d) Determinare il numero complessivo di cellulari a regime, nell'ipotesi che ogni anno vengano venduti complessivamente 100000 nuovi cellulari.**

---

2) Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui il blocco A è un integratore ed il blocco B è descritto dal modello I/O




$$\ddot{y}_B + 2\dot{y}_B + 11y_B = \dot{u}_B.$$

Si consideri dapprima il sistema SENZA il collegamento tratteggiato:
a) Verificare che il sistema è asintoticamente stabile.
b) Determinare il tempo di risposta e discutere l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.

Si consideri ora il sistema CON il collegamento tratteggiato:
c) Determinare la funzione di trasferimento complessiva del sistema, esprimendola in funzione delle funzioni di trasferimento $G_A$ e $G_B$ dei blocchi A e B.
d) Discutere la stabilità del sistema.

---

3) Si consideri il seguente sistema:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

a) Determinare gli stati di equilibrio.
b) Studiarne la stabilità, classificando la tipologia (p.e.: nodo stabile, sella, ...) di ciascun equilibrio.
c) Tracciare il quadro delle traiettorie nell'intorno di ciascun equilibrio.
d) Determinare il verso del vettore tangente le traiettorie in ogni punto dello spazio di stato.
e) Tracciare un possibile quadro delle traiettorie del sistema coerente con tutte le informazioni ottenute.

---

4) Un sistema meccanico è descritto dal seguente modello di stato, in cui $(x_1, x_2)$ rappresentano, rispettivamente posizione e velocità.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u$$
$$y = x_1$$

a) Studiare la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema.
b) Progettare un ricostruttore dello stato il cui errore di stima si annulli in circa 0.1 secondi.
c) Progettare una legge di controllo che porti il sistema a regime in circa 1 secondo.
d) Verificare se è possibile controllare il sistema con una retroazione diretta (statica) dall'uscita, cioè $u = ky$, verificando se esistono valori di $k$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.

1)

a) $x_1(t) =$ # cellulari in servizio da 1 anno nell'istante $t$ (UG)

$x_2(t) =$ " " 2 anni " (PG)

$x_3(t) =$ " " 3 anni " (AG)

$$x_1(t+1) = 0{,}7\,u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}5\,x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}2\,x_2(t) + 0{,}2\,x_3(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0{,}7 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

b) $z x_1 = 0{,}7 u$ $\qquad x_1 = \frac{0{,}7}{z} u$

$z x_2 = 0{,}5 x_1$ $\qquad x_2 = \frac{0{,}35}{z^2} u$

$z x_3 = 0{,}2 (x_2 + x_3)$ $\qquad x_3 = \frac{0{,}07}{z^2(z-0{,}2)} u$

$y = x_1 + x_2 + x_3$

$$y = \left[\frac{0{,}7}{z} + \frac{0{,}35}{z^2} + \frac{0{,}07}{z^2(z-0{,}2)}\right] u = \underbrace{\frac{0{,}7(z-0{,}3)}{z(z-0{,}2)}}_{G(z)} \cdot u$$

c) $\underbrace{\{p_i\}}_{\text{sono 2}} = \{0;\, 0.2\} \subset \underbrace{\{\lambda_i\}}_{\text{sono 3}} \longrightarrow$ Non posso dedurre nulla sulla A.S. (*)

$\lambda_D = 0{,}2 \qquad T_D = -\frac{1}{\ln 0{,}2} \qquad T_R = -\frac{5}{\ln 0{,}2}$

d) $\bar{u} = 100'000$

$$\bar{y} = G(1)\,\bar{u} = \left[0{,}7 + 0{,}35 + \frac{0{,}07}{0{,}8}\right] \cdot 100'000 = 113'750$$

(*) Tuttavia, essendo A triangolare si ha:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 0{,}2 \longrightarrow |\lambda_i| < 1 \;\; \forall i \Longrightarrow$ A.S.

2)

a) $\to \boxed{R_A} \to \boxed{R_B} \to$ A.S. $\Longleftrightarrow$ $R_A$ e $R_B$ A.S.

$$R_A = \frac{G_A}{1+G_A} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1} \to s=-1 \to \text{A.S.}$$

$$R_B = \frac{G_B}{1+G_B} = \frac{\frac{s}{s^2+2s+11}}{1+\frac{s}{s^2+2s+11}} = \frac{s}{s^2+3s+11}$$

$$s = \frac{-3 \pm i\sqrt{35}}{2} \to \text{A.S.}$$

Pertanto il sistema è A.S.

b) $\{\lambda\} = \left\{-1 ; \frac{-3+i\sqrt{35}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{35}}{2}\right\}$ $\quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \to \exists$ oscillazioni

$$\lambda_D = -1 \to T_D = 1 \to T_R = 5$$

c) $$G = \frac{R_A R_B}{1+R_A R_B} = \frac{\frac{G_A}{1+G_A} \cdot \frac{G_B}{1+G_B}}{1+\frac{G_A}{1+G_A} \cdot \frac{G_B}{1+G_B}} = \frac{G_A G_B}{1+G_A+G_B+2G_AG_B}$$

d) $$G = \frac{\frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{\cancel{s}}{s^2+2s+11}}{1+\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2s+11}+2\frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{\cancel{s}}{s^2+2s+11}}$$ il cui denominatore è

$$\text{den}(G) = s^3+2s^2+11s+s^2+2s+11+s^2+2s =$$
$$= s^3+4s^2+15s+11$$

$\alpha_1 = 4 > 0$ $\qquad \alpha_1\alpha_2 = 60 > \alpha_3 = 11 \xrightarrow[\text{HURWITZ } n=3]{} \Sigma$ è A.S.

$\alpha_2 = 15 > 0$

$\alpha_3 \; 11 > 0$

3)

a) $\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_1 = x_2^2$

$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_1 = -2x_2$

$$x_2^2 + 2x_2 = x_2(x_2+2) = 0$$

$x_2 = 0$ $\quad$ $x_2 = -2$

$A = (0,\ 0)$ $\qquad$ $B = (4,\ -2)$

b) $J = \begin{vmatrix} 1 & -2x_2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

$J_A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\quad$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ $\quad$ A INST / SELLA

$J_B = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$ $\quad$ $tr = -1$, $det = 2$ $\quad$ $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ $\quad$ $\lambda = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

B loc. A.S. / FUOCO STAB

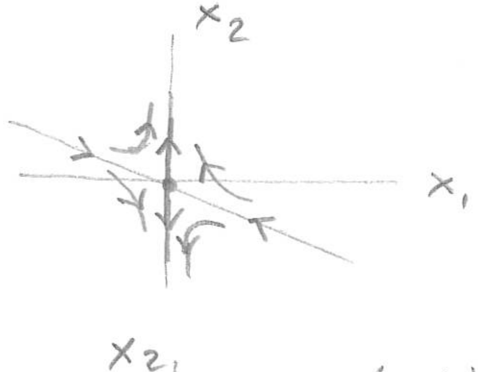
c) A
SELLA

$J_A w = \lambda w$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} w_1 = \lambda w_1 \\ -w_1 - 2w_2 = \lambda w_2 \end{matrix}$$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow w_2 = -\frac{1}{3} w_1$

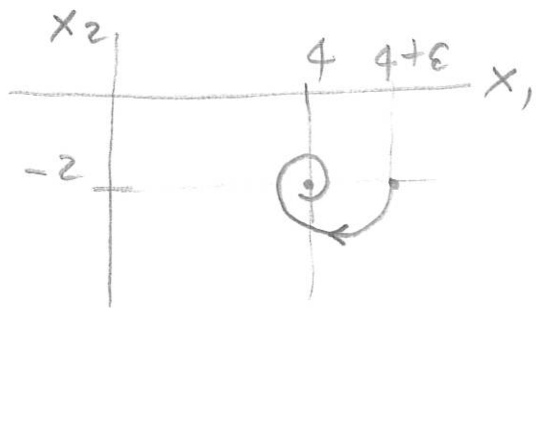
$\lambda_2 = -2 \rightarrow w_1 = 0$




B
FUOCO
STABILE

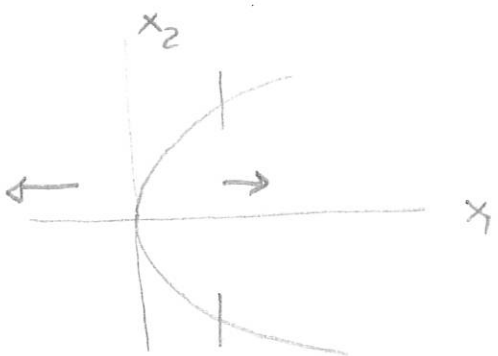
$x(0) = \begin{vmatrix} 4+\varepsilon \\ -2 \end{vmatrix}$ $\quad \varepsilon > 0$

$\dot{x}_2(0) = -4 - \varepsilon + 4 = -\varepsilon < 0$



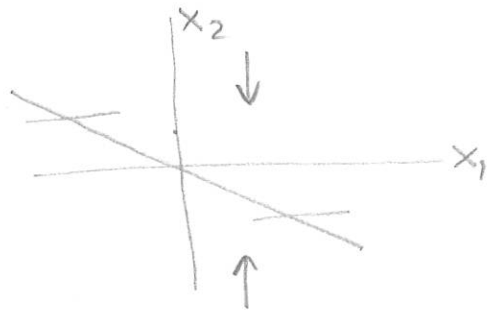
d) $\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_1 = x_2^2$

$\dot{x}_1 = x_1 - x_2^2$

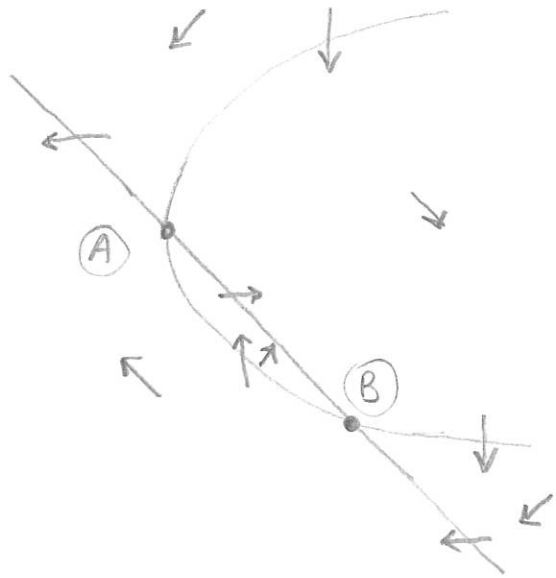


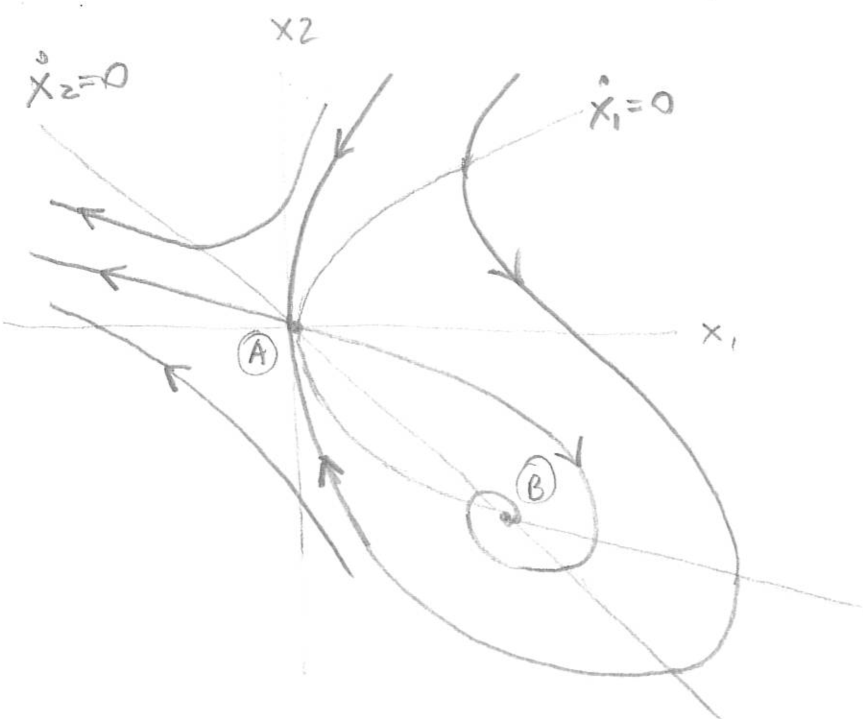

$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} x_1$

$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$




Pertanto si ha



4)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) $\left.\begin{array}{l} tr(A) = -1 < 0 \\ det(A) = 1 > 0 \end{array}\right\} \rightarrow A.S.$

$$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad det(R) = -1 \rightarrow CR$$

$$\theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad det(\theta) = 1 \rightarrow CO$$

b) $A + lc \rightarrow T_R = 0{,}1 \rightarrow T_D = 0{,}02 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_D) = -50 \rightarrow \lambda_1^* = \lambda_2^* = -50$

$$A + lc = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & 1 \\ -1+l_2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} tr(A+lc) = l_1 - 1 = -100 \\ det(A+lc) = -l_1 + 1 - l_2 = 2500 \end{array}\right. \rightarrow l = \begin{vmatrix} -99 \\ -2400 \end{vmatrix}$$

c) $A + bk \rightarrow T_R = 1 \rightarrow T_D = 0{,}2 \rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_D) = -5 \rightarrow \lambda_3^* = \lambda_4^* = -5$

$$A + bk = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1+k_1 & -1+k_2 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} tr(A+bk) = -1 + k_2 = -10 \\ det(A+bk) = 1 - k_1 = 25 \end{array}\right. \longrightarrow k = \begin{vmatrix} -9 & -24 \end{vmatrix}$$

d) $u = kx_1 \qquad \dot{x} = \tilde{A} x \rightarrow \tilde{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1+k & -1 \end{vmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} tr(\tilde{A}) = -1 < 0 \\ det(\tilde{A}) = 1 - k > 0 \end{array}\right. \rightarrow \boxed{k < 1} \qquad A.S.$$