1. COSA SONO I SISTEMI DINAMICI [4 h]

- Definizione, proprietà, categorizzazione.
- Esempi (riconoscitore di parole, legge di Fibonacci, legge di Newton, investimenti e tasse).
- Altri esempi (crescita logistica, metodo iterativo di Newton, risorse e consumatori, sistema meccanico).
- Comportamento asintotico: equilibri, cicli, tori e strani attrattori. Come nascono e come spariscono al variare di un parametro.
- Problemi
- Soluzioni

SISTEMI DINAMICI

Definizione : un sistema dinamico è una settupletta

$$(T, U, X, Y, \Omega, \varphi, g) = \Sigma \ (\text{o } S) \quad \text{in cui}$$

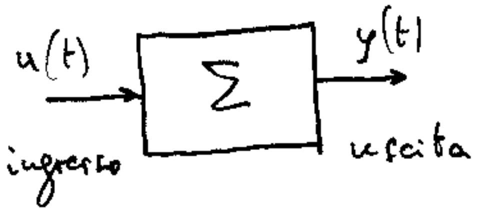
5 insiemi:

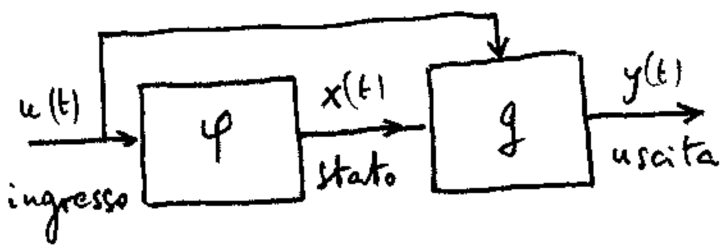
- T = insieme del tempo t (ordinato : $t \geq 0$)
- U = insieme degli ingressi ammissibili in ogni istante di tempo t
- X = ... stati ...
- Y = ... uscite ...
- Ω = insieme delle funzioni di ingresso $u(\cdot)$ ammissibili

2 funzioni:

$$\varphi(\cdot,\cdot) \ : \quad x(t) = \varphi\left(x(0),\ u_{[0,t)}(\cdot)\right) \qquad t \geq 0$$

$$g(\cdot,\cdot) \ : \quad y(t) = g\left(x(t),\ u(t)\right) \qquad t \geq 0$$





se c'è il collegamento diretto da u a y il sistema si dice improprio

Studieremo quasi esclusivamente sistemi propri con ingressi costanti (che quindi non saranno neppure indicati)

<u>Commenti</u>

- Esistono molte classi di sistemi dinamici
- Ognuna di queste classi ha una sua teoria che fa uso di un tipo specifico di matematica
- Spesso la settupletta $\Sigma = (T, U, \dots, g)$ viene chiamata "modello" mentre la parola "sistema" rappresenta la realtà modellizzata
- Un sistema (reale) può essere modellizzato in vari modi (più o meno accurati) così che a un sistema reale sono associabili diversi sistemi formali
- Spesso la settupletta non viene precisata completamente, ma vengono specificate solo le due funzioni
- Quasi sempre la funzione $\varphi(\cdot,\cdot)$ non è assegnata direttamente, ma solo implicitamente attraverso qualche altra funzione
- Se U è un insieme con un solo elemento, anche Ω è tale (ingresso costante nel tempo) e il sistema si chiama <u>autonomo</u>. In questo caso il sistema è descritto da una quintupletta $\Sigma = (T, X, Y, \varphi, g)$
- L'ingresso u si chiama anche input, decisione, controllo, politica, azione, causa, ...
- L'uscita y si chiama anche output, conseguenza, effetto, risultato, ...
- N sistemi possono essere collegati tra loro in molti modi. In tal caso si parla di reti di sistemi o di sistemi e macrosistemi o di sistema e sottosistemi.

Principali classi di sistemi

- Tempo discreto $\quad T = \{\text{interi}\}$
- Tempo continuo $\quad T = \{\text{reali}\}$
- Automi finiti $\quad X$ = insieme finito di elementi
- Automi infiniti $\quad X$ = insieme infinito ma numerabile di elementi
- Dimensioni finite (n) $\quad X = R^n \quad (\text{o } C^n)$
- A parametri distribuiti $\quad X = \{\text{spazio funzionale}\}$
- Reversibili $\quad \varphi$ e g sono definite anche per $t < 0$
- Regolari $\quad \varphi$ è implicitamente descritta da un sistema di equazioni alle differenze

$$x(t+1) = f(x(t)) \qquad \begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

nel caso $u \equiv 0$

o di equazioni differenziali ordinarie

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

nel caso $u \equiv 0$

Quindi i sistemi regolari sono assegnati assegnando

$$\Sigma = \{T, U, X, Y, f, g\}$$

specifica indirettamente φ

- Lineari (e regolari e a dimensioni finite)

$$f = Ax + Bu$$

con A e B matrici e x e u vettori

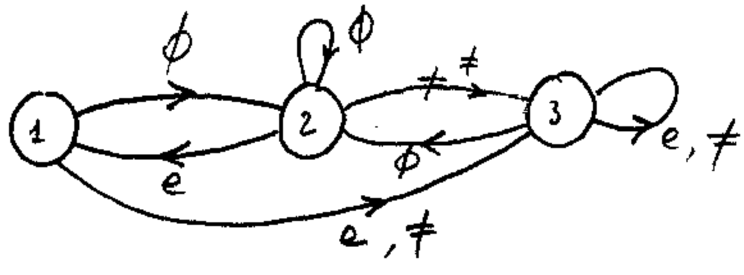
- Positivi $\quad$ sono quelli in cui $x(0) \geq 0 \Rightarrow x(t) \geq 0 \quad \forall u \geq 0$

Esempio 1 : riconoscitore di parole specifiche in un testo

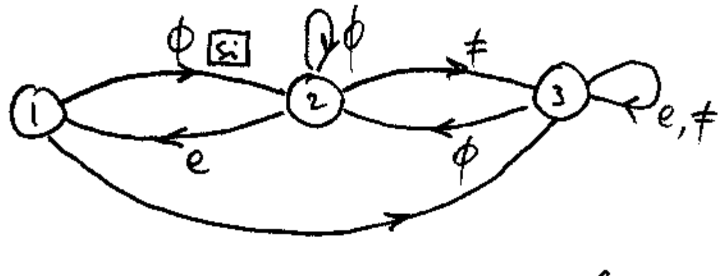
Supponiamo di leggere un testo sequenzialmente e di voler riconoscere una parola specifica (per poi stimare con quale frequenza questa parola appare nel testo)
Supponiamo che questa parola sia la parola e (attenzione la congiunzione e e non la lettera e)
Consideriamo come insieme delle lettere leggibili l'insieme

$U = \{e, \phi, \neq\}$
dove ϕ è uno spazio o una virgola o un punto e virgola o un punto esclamativo, ... cioè ogni simbolo che può precedere la parola e che è quella che vogliamo identificare
$Y = \{si, no\}$ dove si significa che è stata letta la parola e

$X = \{1, 2, 3\}$



Il grafo definisce la funzione f



Questo secondo grafo definisce la funzione g indicando gli archi corrispondenti a lettura avvenuta

Questo sistema è un automa finito

<u>Esempio 2</u> : il sistema di Fibonacci (1303)

$x_1(t) = \#$ di coppie di conigli giovani alla generazione t

$x_2(t) = \#$ di coppie di conigli adulti alla generazione t

$y(t) = \#$ di coppie di conigli

<u>Ipotesi</u>
- i conigli giovani (cioè di prima generazione) non riproducono
- i conigli adulti riproducono e, più precisamente, ogni coppia di conigli adulti produce una coppia di conigli giovani
- i conigli sono immortali

$$f: \begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \Rightarrow x(t+1) = A\,x(t) \quad \text{con } A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$g: \; y(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y(t) = c^T x(t) \quad \text{con } c^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Il sistema è a dimensioni finite, regolare, lineare e positivo

perchè?

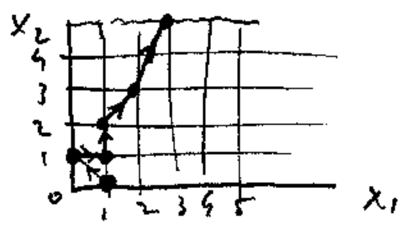
Cosa succede se si parte con 1 coppia di conigli giovani?

$$x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad x(1) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad x(2) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad x(3) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \dots$$

$$y(0) = 1 \quad y(1) = 1 \quad y(2) = 2 \quad y(3) = 3 \quad \dots$$

<u>Problema</u> : mostrare che il resto della sequenza è ...?...

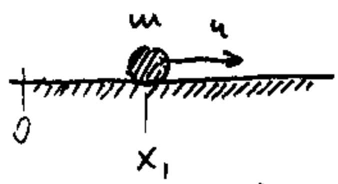
quadro di stato



la sequenza degli stati visitati in successione si chiama <u>traiettoria</u>

Esempio 3 : legge di Newton

forza = massa x accelerazione



x_1 = posizione

x_2 = velocità

y = posizione ($= x_1$)

in assenza di attrito

$$f: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m} u \end{cases} \qquad \dot{x} = Ax + bu \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{vmatrix}$$

$$g: \quad y = x_1 \qquad y = c^T x \qquad c^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

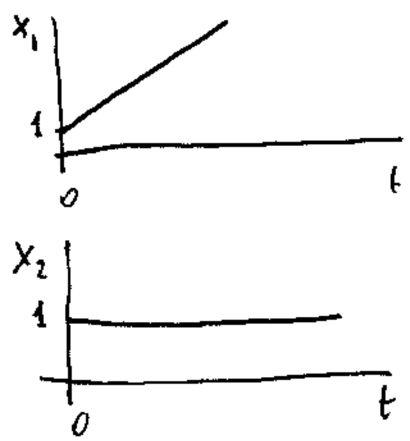
Il sistema è a tempo continuo, regolare, lineare

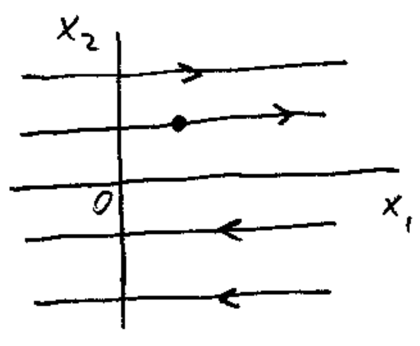
Problema: come si modifica la matrice A se supponiamo che la massa sia soggetta ad attrito viscoso (proporzionale ma opposto alla velocità) ?

Supponiamo $u \equiv 0$ (sistema autonomo)

$x_1(0) = 1$

$x_2(0) = 1$





• è lo stato iniziale $x(0)$

quadro di stato

Esempio 4 : investimenti e tasse

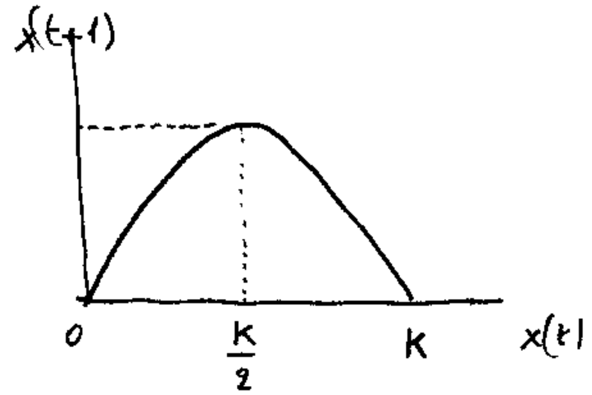
t = periodo elementare (anno)

$x(t)$ = capitale all'inizio dell'anno t

$$x(t+1) = r\,x(t) - \tau\cdot\left(r\,x(t)\right)^2 = r\,x(t) - \tau r^2 x^2(t) = r\,x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

con $K = \dfrac{1}{\tau r}$

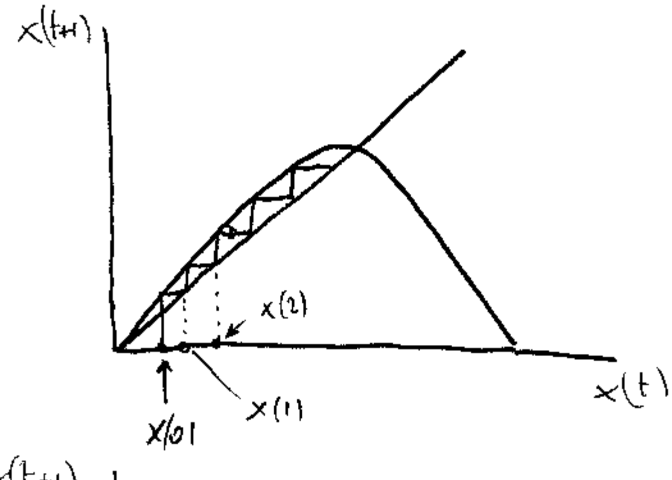
La funzione $x(t+1) = r\,x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{K}\right)$ si chiama mappa quadratica



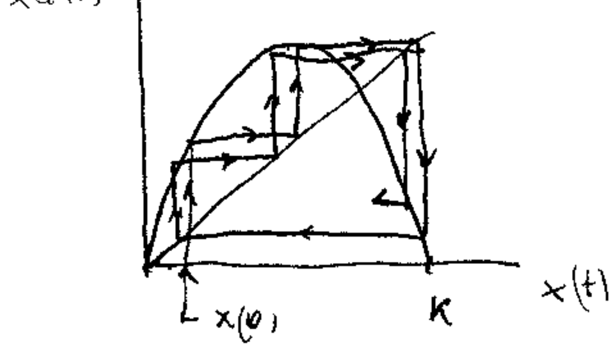
Il massimo di $x(t+1)$ si ha per $x(t) = \dfrac{K}{2}$ e vale

$$x_{max} = r\,\frac{K}{2}\left(1 - \frac{K}{2}\,\frac{1}{K}\right) = \frac{rK}{4}$$

Pertanto se $r \leq 4$ e $x(0)$ è compreso tra 0 e K il capitale rimarrà per sempre tra 0 e K.



costruzione di Moran per il calcolo di $x(1)$, $x(2)$, ...



cosa succede per grandi valori di r? Per esempio per $r = 4$?

Si provi a simulare per $r=4$ e $K = 1$.

Esempio 5 : crescita logistica

t = tempo (reale)

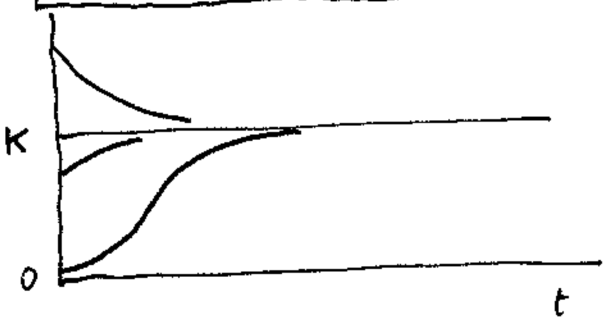
$x(t)$ = # persone di una popolazione di K individui che conoscono un fatto particolare (per esempio, che esiste la televisione a colori)

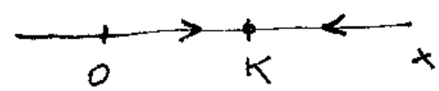
Ipotesi : chi conosce il fatto non lo dimentica
chi non sa impara da chi sa
gli incontri tra chi sa e chi non sa sono casuali

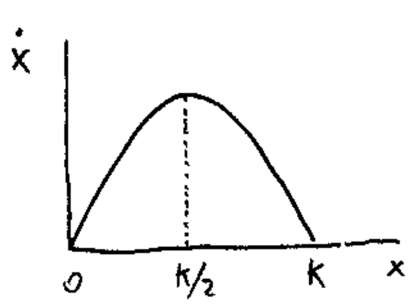
$$x(t+dt) = x(t) + \alpha\, x(t)\left(K - x(t)\right) dt$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\alpha K}_{r}\, x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

$$\boxed{\dot{x} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right)}$$ modello di crescita logistica







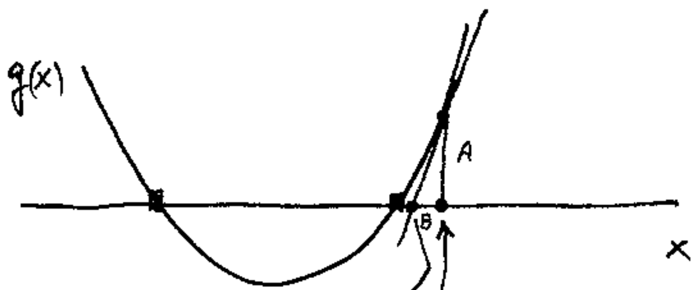
$\dot{x}$ è massimo quando $x = \frac{K}{2}$

K si chiama capacità portante
r si chiama tasso di crescita procapite
Il modello è stato proposto da un demografo (Verhulst) nel 1825
Il modello è forse il modello più usato al mondo (Cesare Marchetti)
Il modello ha molte interpretazioni tra cui la più nota è quella della dinamica di popolazioni (r = natalità – mortalità)

Esempio 6 : metodo di Newton

I metodi iterativi del calcolo numerico sono interpretabili come sistemi dinamici

Facciamo l'esempio del metodo di Newton per il calcolo (grafico) degli zeri di una funzione



■ zeri di $g(x)$

$A = g(x(t))$

$B = \dfrac{A}{g'(x(t))} = \dfrac{g(x(t))}{g'(x(t))}$

$x(t)$ = "soluzione" all'iterazione t

$x(t+1)$ = "soluzione" all'iterazione $(t+1)$

$$x(t+1) = \underbrace{x(t) - \frac{g(x(t))}{g'(x(t))}}_{f(x(t))} \triangleq f(x(t)) \qquad (*)$$

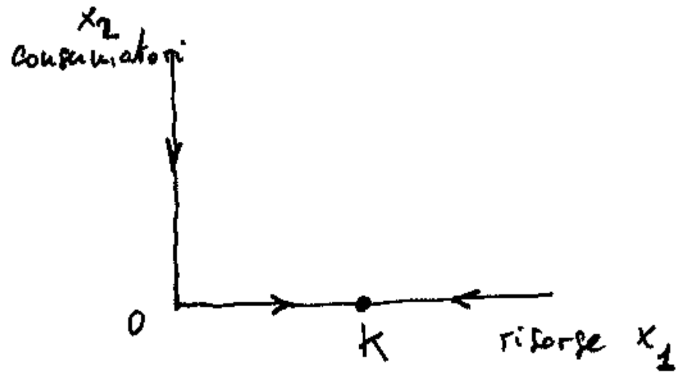
- Si vede dal grafico che il metodo converge a uno zero della funzione $g(x)$
- Si vede anche che il metodo converge a uno o all'altro zero a seconda della condizione (stato) iniziale $x(0)$
- Torneremo su questo problema quando studieremo la stabilità
- Si può dire che il metodo di Newton è un sistema regolare, non lineare, a tempo discreto, a dimensione unitaria ($n=1$) (del I ordine)

Problema : il sistema (*) è reversibile ?

Esempio 7 : risorse e consumatori

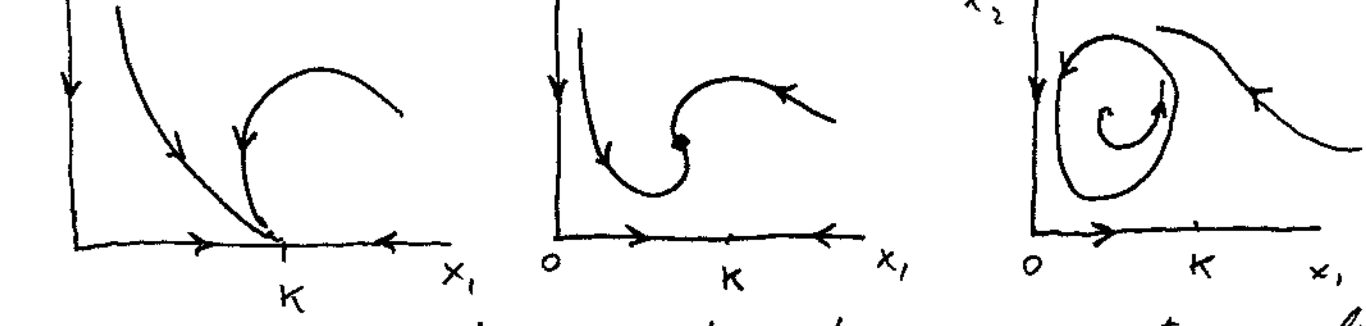
Se la risorsa non si rinnova (esempio: minerali) uno sfruttamento continuo porta banalmente all'estinzione.
Il caso non banale è quello delle risorse rinnovabili.
Esempi di risorse rinnovabili : stock ittici e foreste,
I consumatori possono essere pesci, animali o anche piante, ma il caso di interesse economico è quello della pesca e della agricoltura in cui il consumatore è l'uomo.

Cosa ci si può aspettare ?



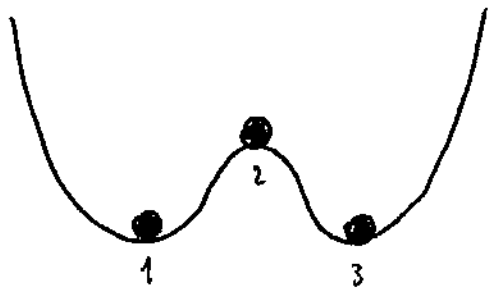
nel caso che qui consideriamo (sfruttatori di una unica risorsa) i consumatori da soli si estinguono, mentre la risorsa (da sola) tende alla sua capacità portante K

Cosa succede se $x(0) > 0$?



estinzione dei consumatori   coesistenza stazionaria   coesistenza ciclica

Esempio 8 : la solita pallina



La pallina può star ferma in tre posizioni

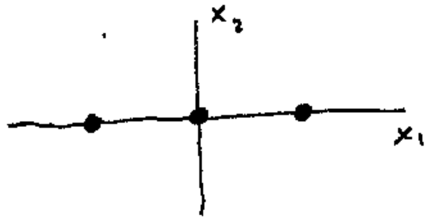
Le variabili di stato sono posizione x_1 e velocità orizzontale x_2 della massa

Si potrebbero scrivere le equazioni di stato

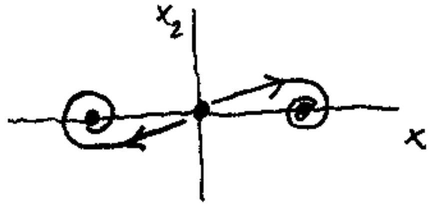
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dots \end{cases} \quad \leftarrow \text{legge di Newton}$$

e poi integrare queste equazioni numericamente per diversi stati iniziali ottenendo così il quadro di stato.

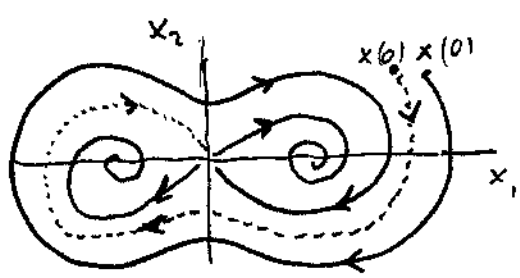
In questo caso si può ricavare il quadro di stato (almeno qualitativamente) sulla base di semplici considerazioni intuitive



se si parte da questi punti si resta lì.



per piccole perturbazioni della posizione 2 con pallina ferma si va o verso 1 o verso 3



per condizioni iniziali opportune $x(0)$ si finisce per $t \to \infty$ in 2 arrivandoci da destra ($\longrightarrow$) o da sinistra ($\dashrightarrow$)

<u>Problema</u> : si disegni il quadro di stato più in grande, in modo da rappresentare qualche oscillazione in più della pallina e poi si annerisca la regione corrispondente a condizioni iniziali che portano per $t \to \infty$ in 3.

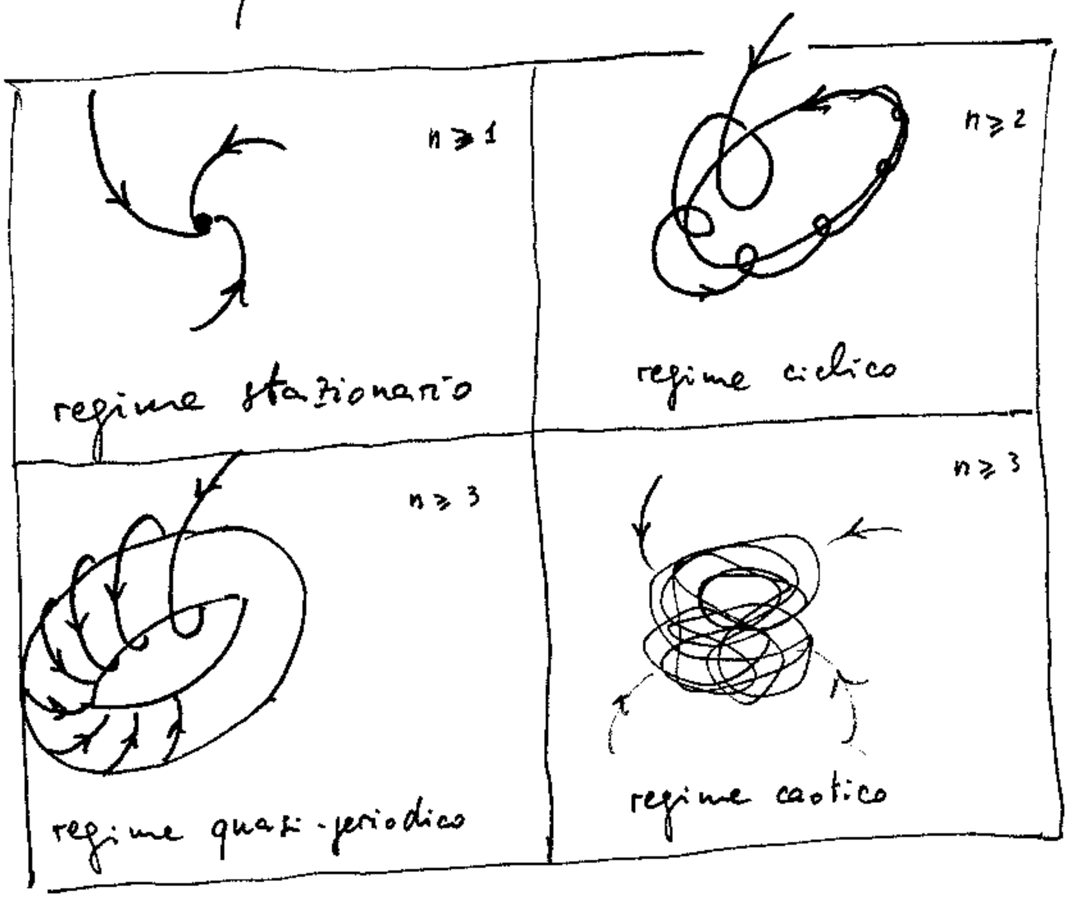
COMPORTAMENTO ASINTOTICO DEI SISTEMI DINAMICI

Spesso interessa sapere come evolverà un sistema dinamico a partire da una specificata condizione iniziale.

Molto più spesso la stessa domanda si pone per diverse (se non tutte) condizioni iniziali.

In particolare interessa conoscere il comportamento asintotico cioè il comportamento del sistema sui tempi lunghi

I possibili comportamenti asintotici (detti "regimi") sono quattro:



attrattori
- equilibri
- cicli
- tori
- strani attrattori

Interessa anche il comportamento per $t \to -\infty$

Nella seconda parte del corso studieremo come gli attrattori nascono e spariscono al variare di qualche parametro.

1. COSA SONO I SISTEMI DINAMICI

PROBLEMI

P.1

Si consideri il sistema a tempo continuo del secondo ordine (modello di Kermack-Mc Kendrick (1927))

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = \alpha x_1 x_2 - \beta x_2$$

con α e β costanti positive.

- Si dimostri che il sistema è positivo ($x(0) \geq 0 \Rightarrow x(t) \geq 0 \forall t$).
- Si interpretino x_1 e x_2 come densità di individui sani (ma suscettibili di essere infettati) e infetti (che possono trasmettere l'infezione prima di morirne o guarirne (diventando così sani ma non suscettibili perché dotati di anticorpi) .
- Esprimere le proprie intuizioni sulla dinamica dell'epidemia per mezzo di un quadro di stato.
- Simulare il sistema per $\alpha = \beta = 1$ e verificare se le intuizioni erano corrette.

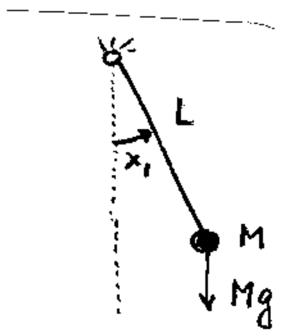
P. 2

Si consideri il pendolo riportato in figura, costituito da una asta rigida non pesante di lunghezza L e da una boccia di massa M (e, quindi, di peso Mg).

Si indichino con x_1 e x_2 la posizione e velocità angolare del pendolo.

Infine, si supponga che il pendolo sia soggetto ad attrito viscoso, cioè a un momento $M = -\alpha x_2$ che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità angolare x_2.

- Si scrivano le equazioni di stato del pendolo.
- Si esprimano le proprie intuizioni sulla dinamica del pendolo per mezzo di un quadro di stato (ed, eventualmente, si verifichino tali intuizioni per simulazione).



P.3

Si considerino i sistemi a tempo continuo del II ordine della forma (a volte detta di Kolmogorov)

$$\dot{x}_1 = x_1 f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = x_2 f_2(x_1, x_2)$$

dove f_1 e f_2 sono funzioni limitate. Si dica perché tali sistemi sono positivi (cioè si dimostri che $x_1(0),\ x_2(0) \geq 0$ implica $x_1(t), x_2(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$).

P.4

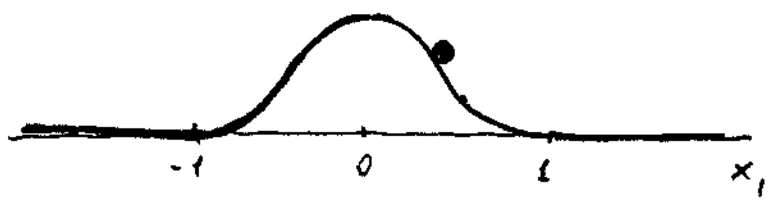
Si consideri il seguente metodo i terativo per il calcolo di $\sqrt{a}$ con $0 < a < 1$:

$$x(t+1) = x(t) + a - x^2(t)$$

Si interpreti il metodo come un sistema dinamico a tempo discreto e si discuta graficamente la convergenza del metodo.

P. 5

Usando argomenti puramente intuitivi si tracci il quadro di stato del seguente sistema meccanico, costituito da una massa puntiforme che scivola con attrito su una superficie (perfettamente orizzontale per $|x_1| \geq 1$).



$x_1(t) =$ posizione della massa

$x_2(t) =$ velocità della massa

SOLUZIONI

1. COSA SONO I SISTEMI DINAMICI

S. 1

- Poichè $x_1(t) = 0$ implica $\dot{x}_1(t) = 0$ qualsiasi sia x_2, ne consegue che l'asse x_2 del piano di stato è invariante: cioè se lo stato del sistema è un punto dell'asse x_2 lo stato del sistema resterà per sempre sull'asse x_2. Ciò implica che nessuna traiettoria del sistema può attraversare l'asse x_2.

  La stessa cosa vale per l'asse x_1 perchè $\dot{x}_2 = 0$ se $x_2(0)$.

  In conclusione, traiettorie che partono sugli assi x_1 e x_2 restano su tali assi e traiettorie che partono da punti interni del primo quadrante (quadrante positivo) restano in tale quadrante perchè non possono attraversare gli assi x_1 e x_2.

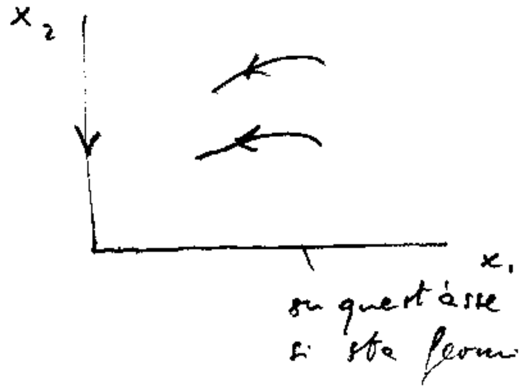
- La prima equazione di stato afferma che il tasso di nuovi infetti è proporzionale al numero di incontri tra individui suscettibili e individui infetti (che è proporzionale a $x_1 x_2$ se gli incontri avvengono a caso).

  La seconda equazione dice anche che il tasso di guarigioni e/o morti è proporzionale al numero di infetti.

- Se non ci sono individui infetti (cioè se $x_2 = 0$) continuano a non essercene anche in futuro. Cioè se si parte da un punto $x_1(0)$ dell'asse x_1 si resta per sempre in quel punto

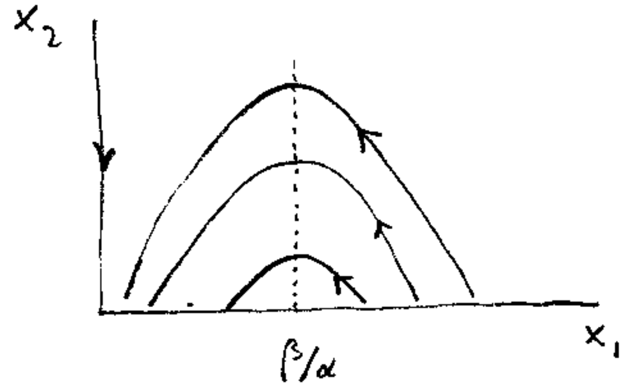
Se non ci sono individui suscettibili (cioè se si è in un punto dell'asse x_2) si rimane in tale situazione perchè le guarigioni e le morti non generano individui suscettibili. Morti e guarigioni fanno però diminuire x_2.

Sulla base di quanto detto finora possiamo quindi dire che un possibile quadro di stato è il seguente



le traiettorie all'interno del quadrante positivo si sviluppano verso sinistra perchè i suscettibili non possono che diminuire

- La simulazione mostra che il quadro di stato è di questo tipo



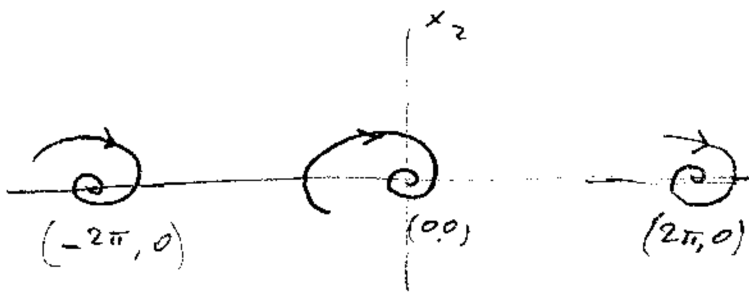
Interpretazione: se in una popolazione di soli suscettibili vengono introdotti alcuni infetti, l'epidemia si sviluppa se e solo se la popolazione è maggiore di β/α

Conseguenza: per evitare l'epidemia fare in modo che α sia piccolo (proteggersi dai contatti) e/o che β sia grande (guarire in fretta o isolare gli infetti)

S.2

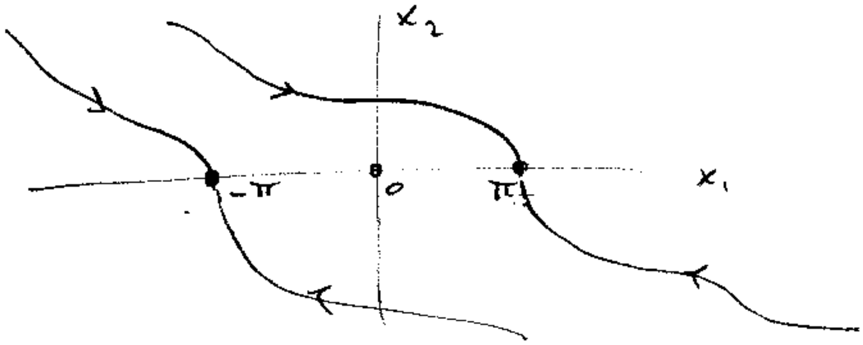
- $$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \underbrace{\frac{1}{J}}_{\text{momento d'inerzia}} \left(M g L \operatorname{sen} x_1 - \underbrace{h}_{\text{coefficiente di attrito viscoso}} x_2 \right)$$

- Per piccole oscillazioni si ha

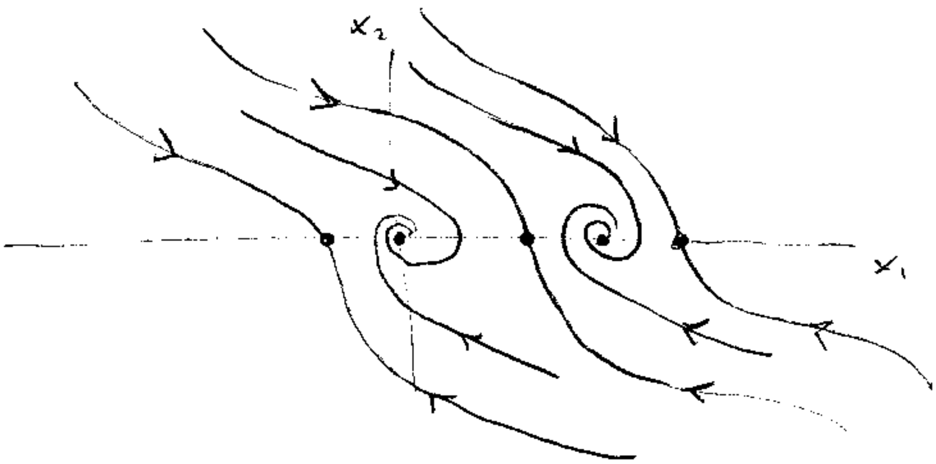


le oscillazioni si smorzano e si finisce in $(0,0)$ o in $(-2\pi, 0)$ $(-4\pi, 0), \dots, (2\pi, 0), (4\pi, 0) \dots$

Per condizioni iniziali molto particolari si tende a fermarsi con pendolo rovesciato (punti $(\mp \pi, 0)$, $(\mp 3\pi, 0) \dots$)



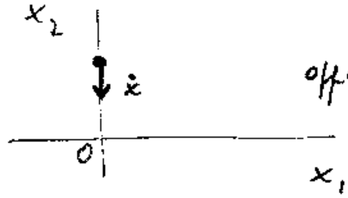
In conclusione, il quadro è



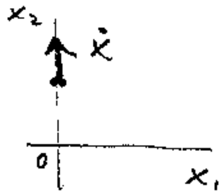
S. 3

Se $x_1 = 0$ il vettore $\dot{x}$ tangente alle traiettorie è

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ x_2 f_2(x_1, x_2) \end{vmatrix}$$

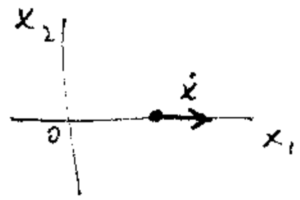


oppure

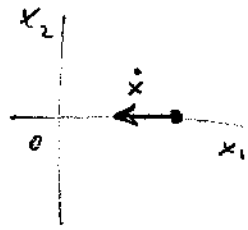


Se $x_2 = 0$ il vettore $\dot{x}$ tangente alle traiettorie è

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} x_1 f_1(x_1, x_2) \\ 0 \end{vmatrix}$$



oppure



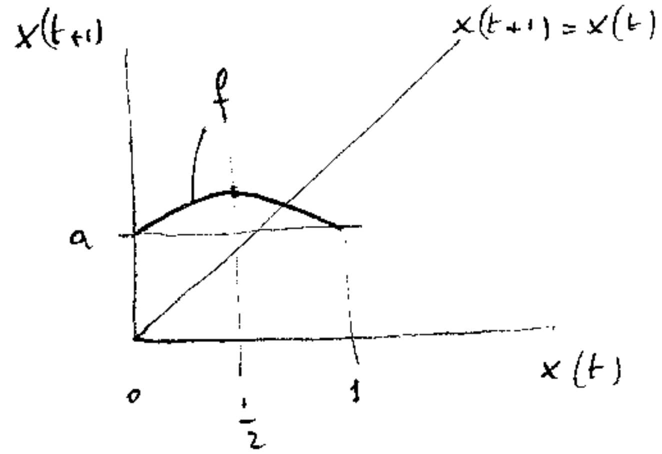
Pertanto, gli assi x_1 e x_2 sono traiettorie e dato che le traiettorie non possono incrociarsi se si parte nel primo quadrante ci si resta per sempre.

S.4

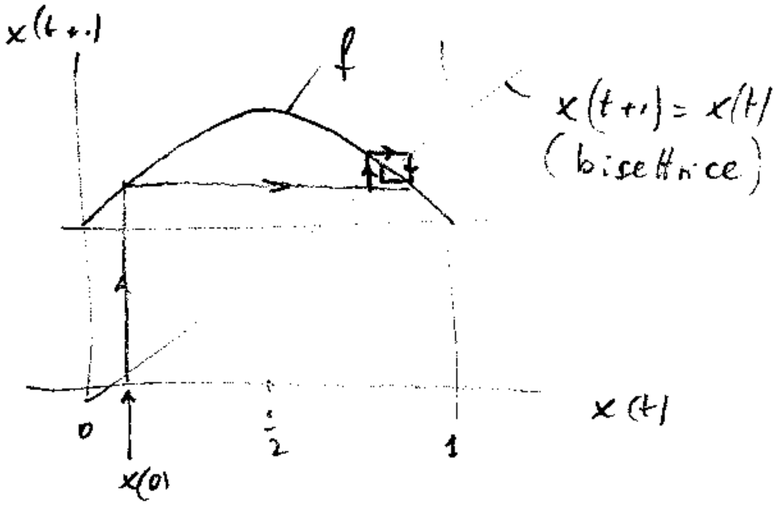
L'equazione è effettivamente quella dei sistemi a tempo discreto

$$x(t+1) = f(x(t))$$

L'evoluzione del sistema si può determinare graficando la funzione f

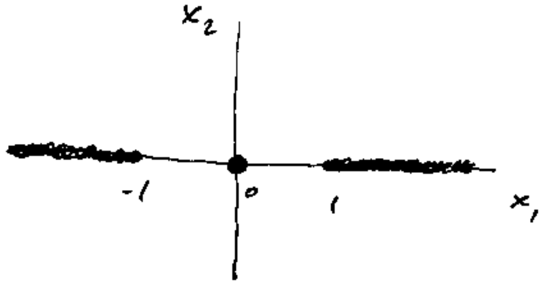


Per determinare la sequenza $x(0), x(1), x(2) \dots$ si può procedere con il metodo di Moran (rimbalzi sulla bisettrice) vedendo così che il metodo converge a un punto caratterizzato da $x(t) = x(t+1)$ e, quindi, da $x = \sqrt{a}$

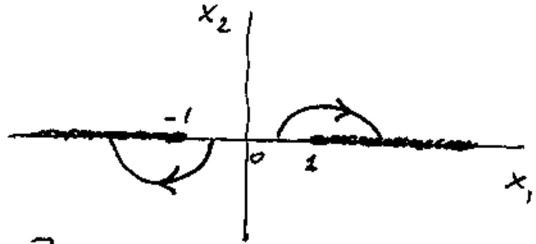


S. 5

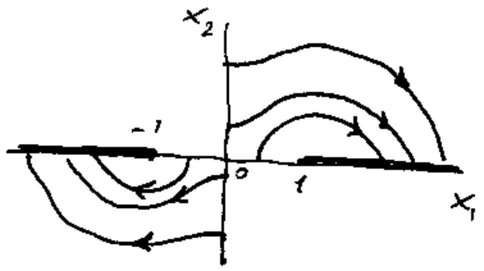
La pallina può star ferma nel punto $\bar{x}_1 = 0$ e in tutti i punti $\bar{x}_1$ maggiori o uguali a 1 in modulo



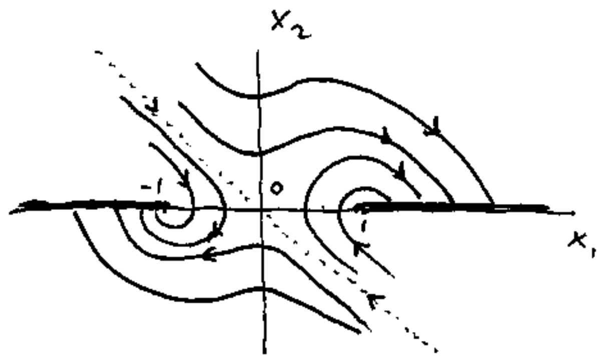
La pallina che parte ferma ($x_2 = 0$) da un punto x_1 con $0 < x_1 < 1$ [$-1 < x_1 < 0$] si muove verso destra [sinistra] e va a fermarsi in un punto $\bar{x}_1 > 1$ [$\bar{x}_1 < -1$]



La pallina che passa per il punto $x_1 = 0$ con velocità positiva [negativa] si muove verso destra [sinistra] e termina la sua corsa in un punto $\bar{x}_1 > 1$ [$\bar{x}_1 < -1$]



La pallina che passa per un punto $x_1 < 0$ [$x_1 > 0$] con velocità $x_2 > 0$ [$x_2 < 0$] supera la cima se $|x_2|$ è sufficientemente grande (e quindi termina la sua corsa in un punto $\bar{x}_1 > 1$ [$\bar{x}_1 < -1$]) e altrimenti inverte la sua velocità prima di raggiungere la cima e termina la sua corsa in un punto $\bar{x}_1 < -1$ [$\bar{x}_1 > 1$]



la traiettoria punteggiata è quella particolarissima traiettoria lungo la quale la pallina va a fermarsi nel punto $x_1 = 0$