2. STABILITA' DEI SITEMI LINEARI (richiami) [5h]

- Definizione e esempi (rete di serbatoi, legge di Fibonacci, legge di Newton).
- Autovalori e stabilità asintotica. Criterio della traccia e del determinante. Esempio (corsa agli armamenti).
- Autovalori, autovettori e quadri di stato dei sistemi del II ordine.
- Esempio: il principio di Peter sulle organizzazioni gerarchiche.
- Il caso n-dimensionale. Esempi geometrici.
- Problemi
- Soluzioni

Sistema lineare : definizioni di stabilità

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad\qquad x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$$

$$x(t) = \underbrace{\phi(t)\,x(0)}_{\text{movimento libero}} + \psi(t)\, u_{[0,t)}^{(\cdot)}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} A^t & \text{tempo discreto} \\ e^{At} = 1 + At + A^2\dfrac{t^2}{2!} + \cdots & \text{tempo continuo} \end{cases}$$

Definizione

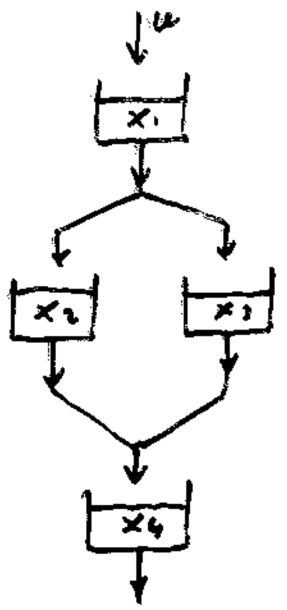
$\phi(t)\,x(0) \longrightarrow 0 \quad \forall\, x(0)$ — asintotica stabilità

$\begin{cases} \phi(t)\,x(0) \text{ limitato } \forall\, x(0) \\ \exists\, x(0) : \phi(t)\,x(0) \text{ non tende a zero} \end{cases}$ — semplice stabilità

$\exists\, x(0) : \phi(t)\,x(0)$ illimitato — instabilità

instabilità $\begin{cases} \text{forte (esponenziale)} \\ \text{debole} \end{cases}$

Esempio 1 (rete di stoccaggio)



Se $u \equiv 0$ (movimento libero) i serbatoi si scaricano (più o meno in fretta) da qualsiasi condizione iniziale si parta

$$\Downarrow$$

asintotica stabilità

Esempio 2 (conigli di Fibonacci)

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = x_1(t) + x_2(t)$$

Poiché la popolazione aumenta (a causa della immortalità) il sistema è instabile

Esempio 3 : pallina senza attrito

la velocità si conserva e la pallina va all'infinito

Quindi : instabilità

Esempio 4 : pallina con attrito

la velocità tende a zero e, quindi, la pallina tende a fermarsi

semplice stabilità

Autovalori di una matrice A (definizione analitica)

$$A \rightarrow \Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \text{polinomio caratteristico} =$$
$$= \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha^n$$

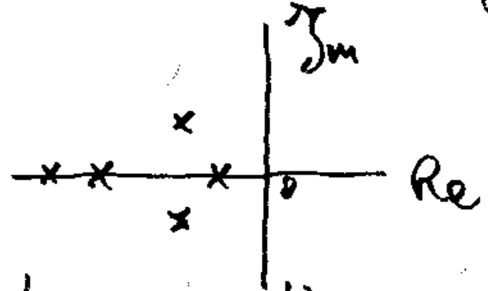
Osservazione : esistono metodi numerici per il calcolo dei coefficienti α_i del polinomio caratter.

$$\Delta_A(\lambda) = 0 \implies \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad \text{autovalori}$$

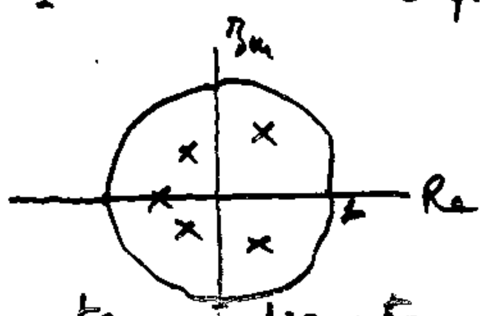
Osservazioni :
* gli autovalori possono essere sia reali che complessi (coniugati)
* gli autovalori possono essere multipli
* i metodi numerici più efficaci per il calcolo degli autovalori di A non passano attraverso il calcolo di $\Delta_A(\lambda)$
* se la matrice A è in forma triangolare gli autovalori sono già noti perché coincidono con gli elementi della diagonale
* $\operatorname{tr} A$ = traccia di $A \triangleq \sum_i a_{ii} = \sum_i \lambda_i$
* $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_i \lambda_i$

$\boxed{\text{STABILITÀ E AUTOVALORI}}$

$$A = \text{asint. stab.} \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 & \forall i \quad \text{tempo continuo} \\ |\lambda_i| < 1 & \forall i \quad \text{tempo discreto} \end{cases}$$



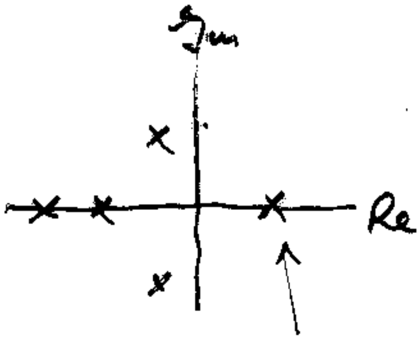
tempo continuo

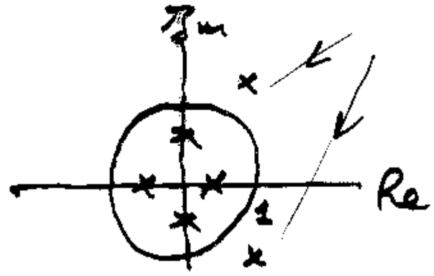


tempo discreto

Instabilità forte

$$A = \text{instabile forte} \iff \begin{cases} \exists\, \lambda_i : \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0 & \text{continuo} \\ \exists\, \lambda_i : |\lambda_i| > 1 & \text{discreto} \end{cases}$$

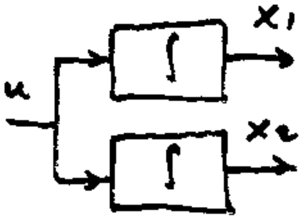




<u>Osservazione</u> è più difficile distinguere tra instabilità debole e semplice stabilità

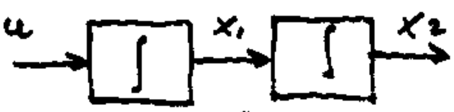
$\dot{x} = u \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow\ ?$

$\dot{x} = 0$ (mov. libero) $\Rightarrow x = x(0) \Rightarrow$ semplice stabilità



se $u = 0$ (mov. libero) sia x_1 che x_2 restano costanti $\Rightarrow$ <u>semplice stabilità</u>

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (autovalore nullo doppio)



se $u = 0$, x_1 resta costante e x_2 varia linearmente (cioè va a $\mp\infty$ con legge polinomiale (lineare))

<u>instabilità debole</u>

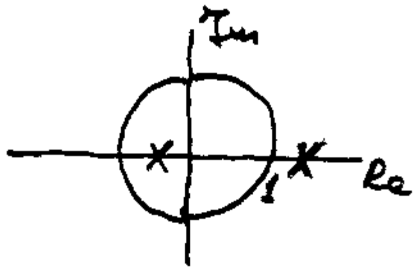
Eppure $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ come nel caso precedente degli integratori in parallelo

<u>Teorema</u> A = sempl. stab. se $\mathrm{Re}(\lambda_i) \le 0\ \forall i$ e tutti gli autovalori con $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ sono radici semplici del polinomio minimo

Esempio 1 (conigli di Fibonacci)

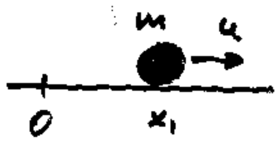
$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$



$\Rightarrow$ instabilità forte

Esempio 2 (pallina con attrito)

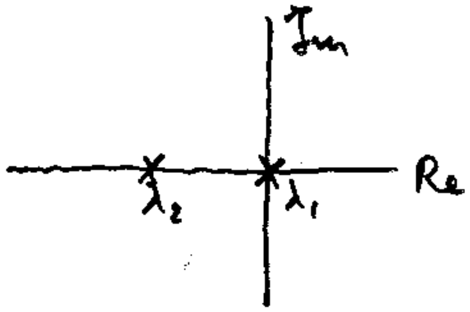


$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{u}{m} - \frac{h}{m} x_2$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda + \frac{h}{m} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{h}{m}\lambda = \lambda\left(\lambda + \frac{h}{m}\right)$$

Quindi $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -\frac{h}{m}$



λ_1 non può che essere radice semplice del polinomio minimo

$\Downarrow$

semplice stabilità

Sistemi del II ordine a tempo continuo

$$\dot{x} = A x \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tr}\, A = a_{11} + a_{22} < 0 \\ \det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow A = \text{as. stabile}$$

Lo stesso criterio non vale se il tempo è discreto

Lo stesso criterio non vale se $n > 2$

Dimostrazione

$$\begin{array}{l} \mathrm{tr}\, A < 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \\ \det A > 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 > 0 \end{array} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad i = 1,2$$

Esempio : corsa agli armamenti

$\dot{x}_1 = - m_1 x_1 + d_1 x_2$ $\qquad$ x_1 = potenziale bellico 1

$\dot{x}_2 = d_2 x_1 - m_2 x_2$ $\qquad$ x_2 = " " 2

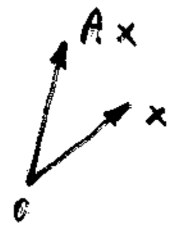
m_i = coeff. di mortalità

d_i : difensivismo

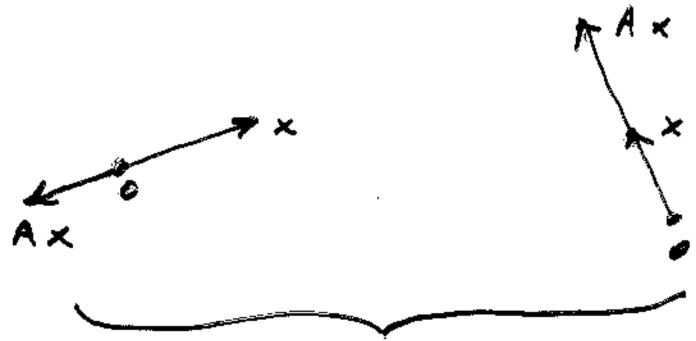
$$A = \begin{vmatrix} -m_1 & d_1 \\ d_2 & -m_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{tr}\, A < 0 \text{ sempre} \\ \det A = m_1 m_2 - d_1 d_2 \end{array}$$

Conclusione : ci si arma illimitatamente se $d_1 d_2 > m_1 m_2$, cioè se si ha troppa paura

Autovalori e autovettori di una matrice A



x non è un autovettore



x è un autovettore

Definizione

$x \neq 0$ è un autovettore se e solo se $\exists\, \lambda$ tale che

$$Ax = \lambda x$$

Lo scalare λ si chiama autovalore

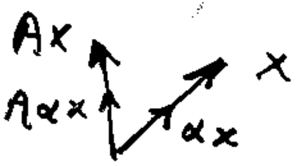
Proprietà $(x, \lambda) = (\text{autovettore}, \text{autovalore}) \Rightarrow Ax = \lambda x$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)x = 0 \Longrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$$

A rigore gli autovalori sono le radici reali dell'equazione caratteristica

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (*)$$

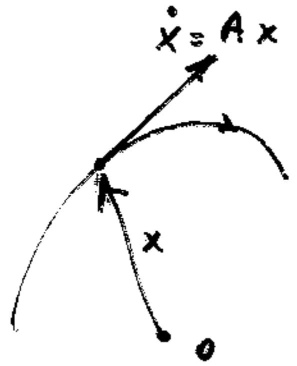
Ma per abuso di linguaggio chiameremo autovalori anche le radici complesse dell'equazione caratteristica $(*)$



se x non è un autovettore anche αx non è un autovettore

Se x è un autovettore anche αx lo è

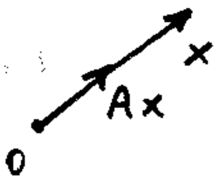
Autovettori e traiettorie rettilinee



Ax è il vettore tangente alla traiettoria perché
$$\dot{x} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$

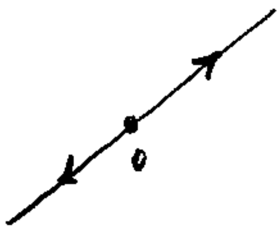
Se x e Ax sono proporzionali la traiettoria per x è rettilinea

x = autovettore (λ)

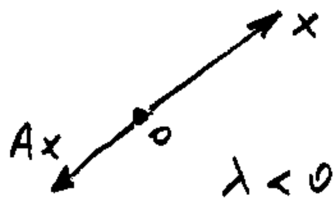


$\lambda > 0$

$\Downarrow$

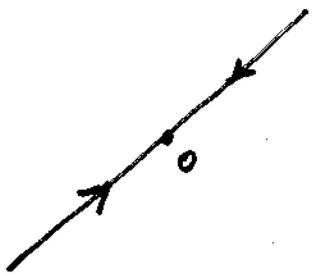


due traiettorie divergenti dall'origine



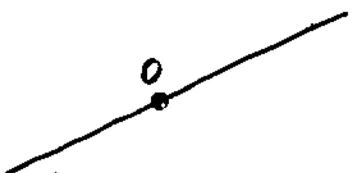
$\lambda < 0$

$\Downarrow$



due traiettorie convergenti verso l'origine

caso critico $\lambda = 0$



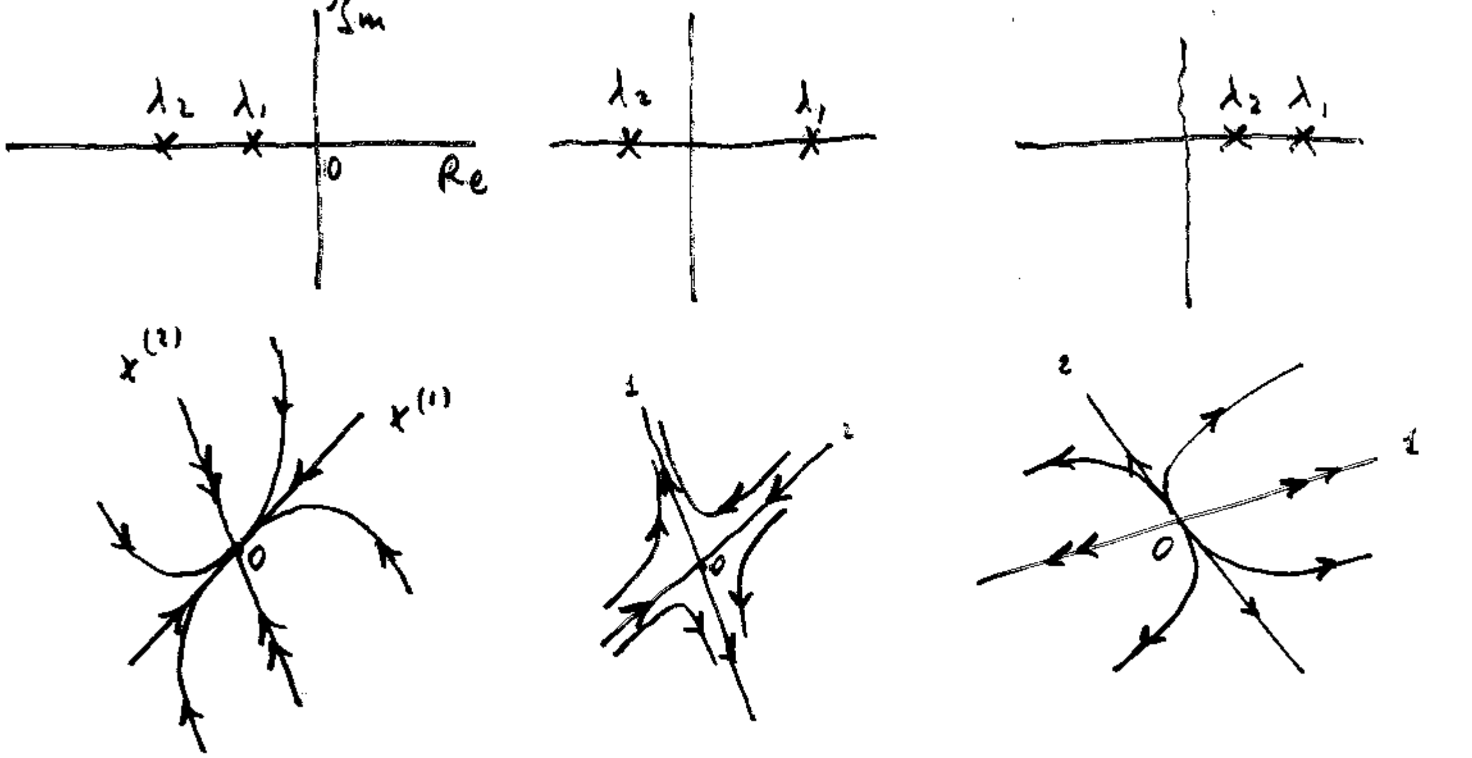
su tutta la retta non ci si muove

$$\dot{x} = Ax = \underset{0}{\lambda} x = 0$$

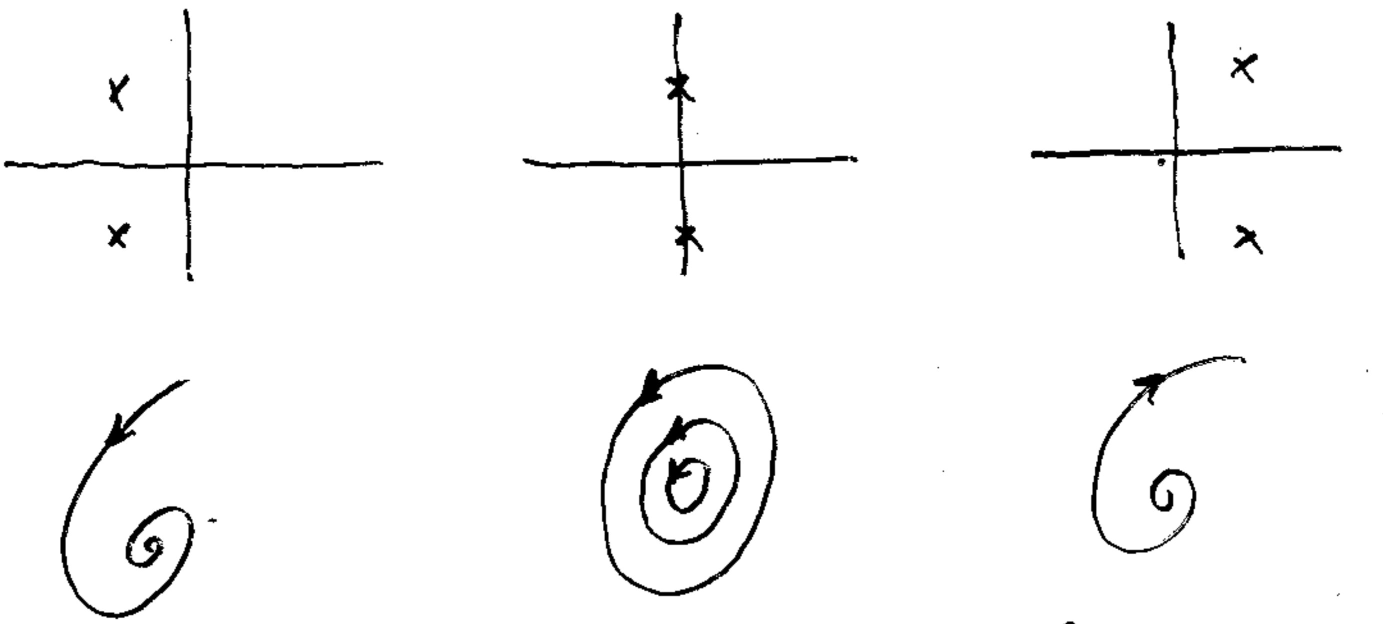
$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = \text{cost.}$

Sistemi del II ordine

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$



nodo stabile | sella | nodo instabile

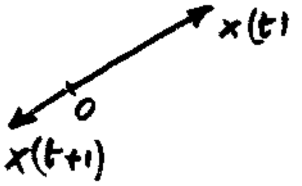


fuoco stabile | centro | fuoco instabile

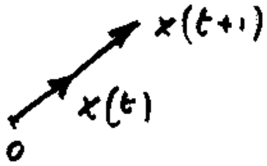
Il caso dei sistemi a <u>tempo discreto</u>

$x(t+1) = A\, x(t)$

Se x = autovettore allora $x(t+1) = A\, x(t) = \lambda\, x(t)$



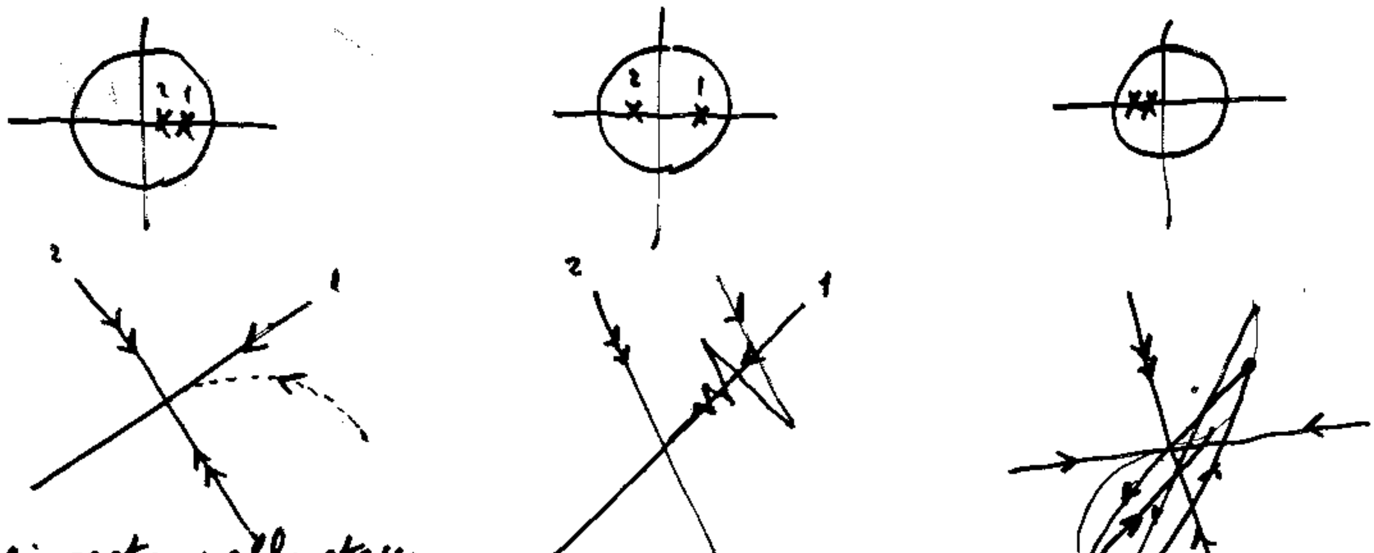
$-1 < \lambda < 0$



$\lambda > 1$

. . .   . . .

Caso dei sistemi del II ordine



si resta nello stesso quadrante

si cambia quadrante

si alterna tra quadranti opposti

$\lambda = a \mp ib \Rightarrow ?$

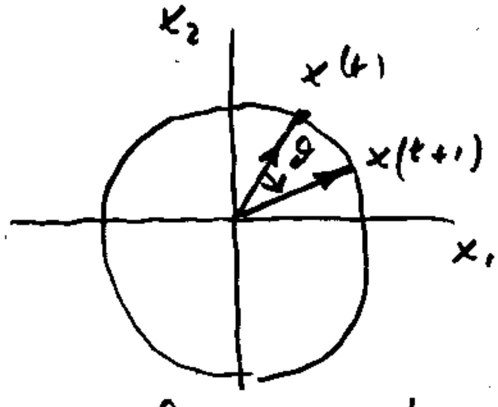
$x(t+1) = A\, x(t)$

$|x(t+1)| = |A\, x(t)| = |\lambda| \cdot |x(t)|$

Se $|\lambda| = 1 \Rightarrow |x|$ resta costante

$\lambda = a + ib = \rho\, e^{i\vartheta}$

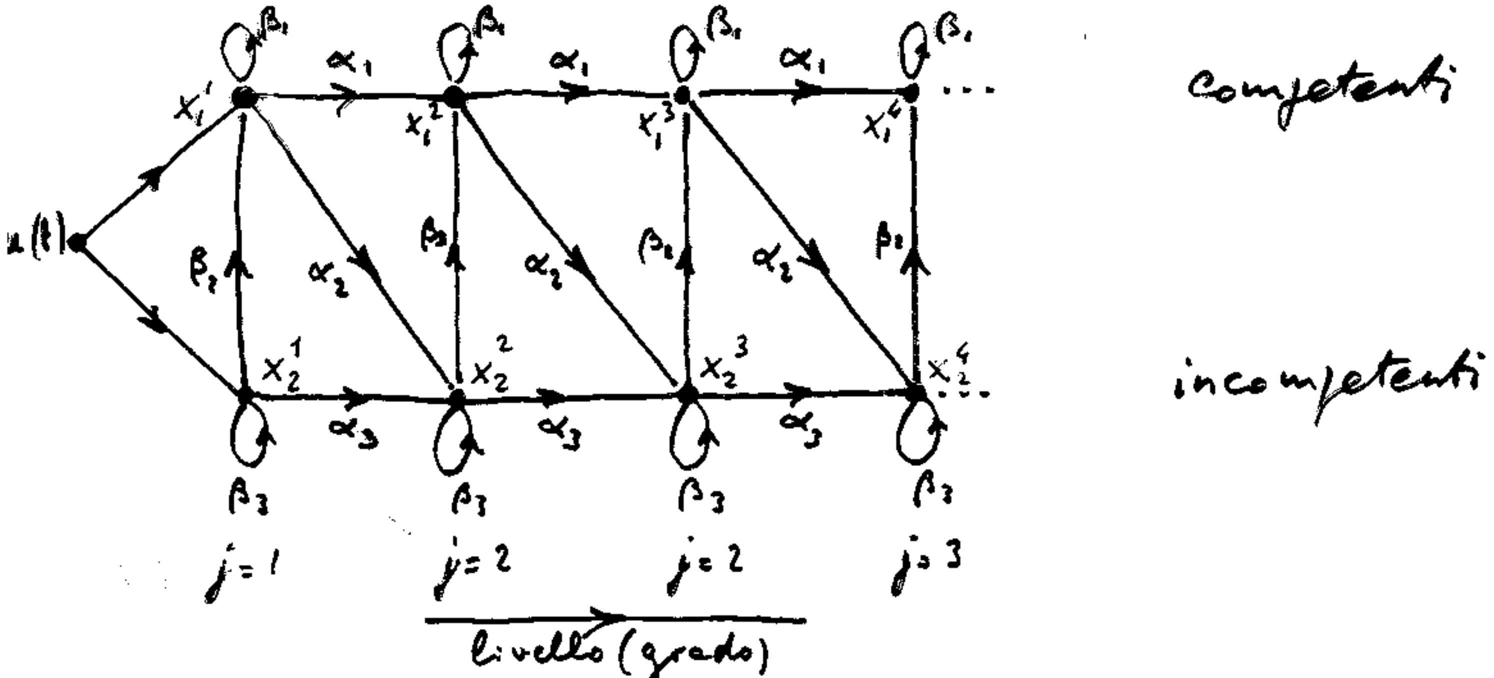
$\rho = 1$ se $|\lambda| = 1$



se ϑ è in rapporto irrazionale con 2π non si ripassa mai per lo stesso punto

Principio di Peter

Nelle strutture gerarchiche la percentuale di competenti diminuisce col livello.



$x_j^i(t)$ = # individui nel livello i, nello stato j (dove $j=1$ significa competenti e $j=2$ incompetenti) e nell'anno t

α_i e β_i sono probabilità

Supponiamo di essere in condizioni stazionarie (cioè $u(t)$ non varia con t, così come $x_j^i(t)$)

$$\begin{vmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \end{vmatrix} = \underset{\substack{P \\ \text{(promozioni)}}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{vmatrix} + \underset{\substack{R \\ \text{(ricicli)}}}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \end{vmatrix}$$

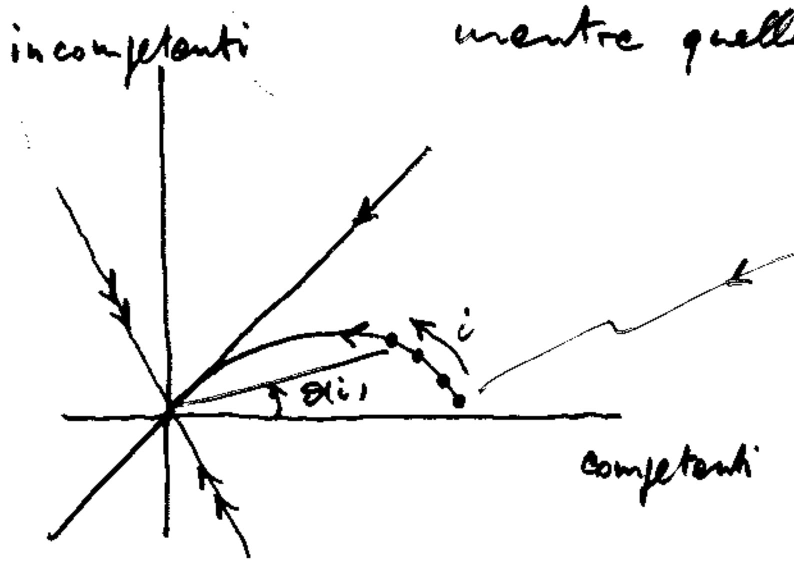
$$x^{i+1} = P x^i + R x^{i+1}$$

$$x^{i+1} = P x^{i} + R x^{i+1}$$

$$(I - R)\, x^{i+1} = P x^{i}$$

$$x^{i+1} = \underbrace{(I - R)^{-1} P}_{A}\, x^{i} \qquad \text{cioè} \quad x^{i+1} = A\, x^{i}$$

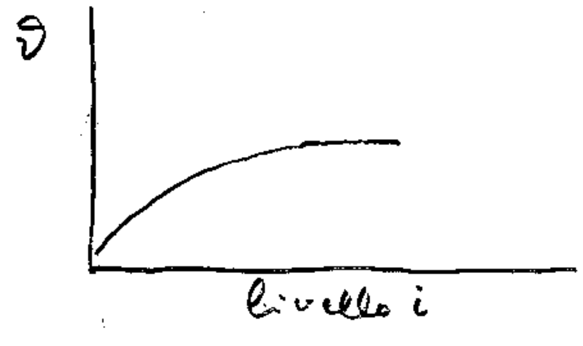
Si può dimostrare (non è immediato) che la matrice A ha due autovalori reali e positivi minori di 1 e che l'autovettore dominante è positivo mentre quello subdominante non lo è



si parte da qui se si ipotizza che al primo livello gli assunti siano quasi tutti competenti

$$\vartheta(i) = \frac{\text{incompetenti}}{\text{competenti}}$$

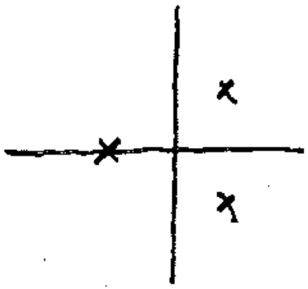
A causa della posizione relativa dei due autovettori si vede che $\vartheta(i)$ cresce con i

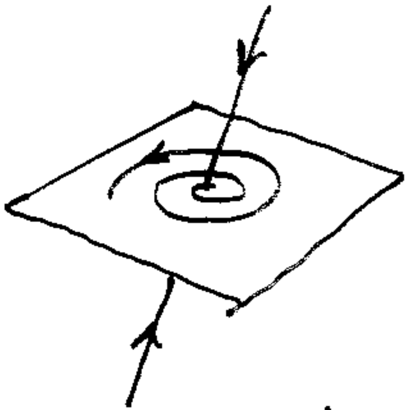


CASO GENERALE

$\dot{x} = A x$ $\qquad$ A = matrice $n \times n$ $\qquad$ n autovalori e autovettori

$$
n \text{ autovalori} \begin{cases} n^- & \text{con } Re(\lambda_i) < 0 \\ n^+ & \text{con } Re(\lambda_i) > 0 \\ n^0 & \text{con } Re(\lambda_i) = 0 \end{cases}
\qquad
\begin{aligned} & W^s = \text{varietà stabile} \\ & W^u = \text{varietà instabile} \\ & W^0 = \text{varietà centro} \end{aligned}
$$

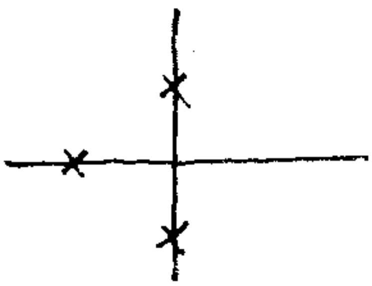


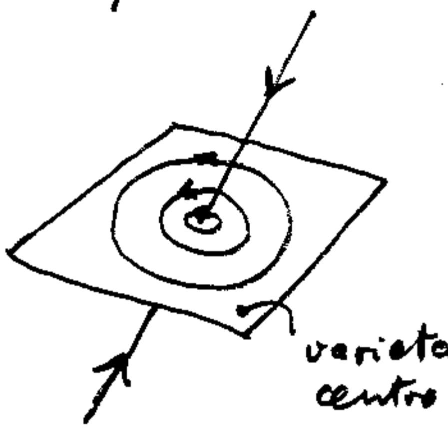


$n^- = 1$

$n^+ = 2$

$\boxed{n^0 = 0}$

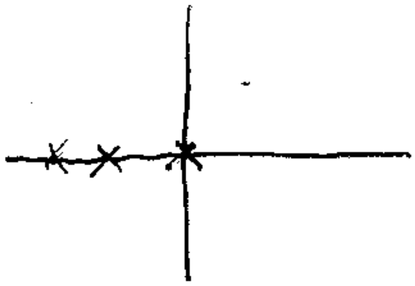


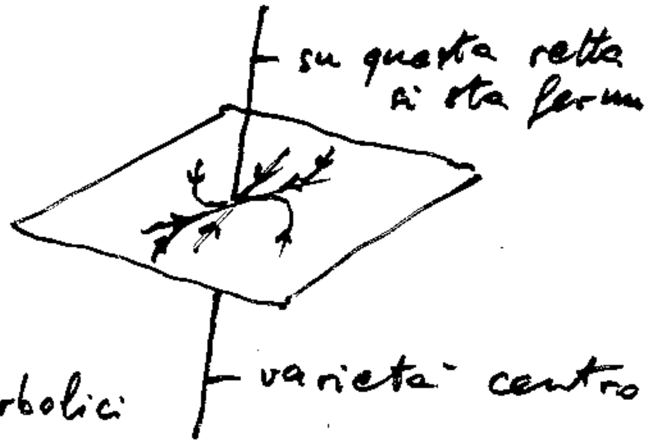


$n^- = 1$

$n^+ = 0$

$n^0 = 2$





$$
\text{sistemi lineari} \begin{cases} \exists W^0 : \text{non iperbolici} \\ \nexists W^0 : \text{iperbolici} \begin{cases} \text{attrattori} & n^0 = n^+ = 0 \\ \text{repulsori} & n^0 = n^- = 0 \\ \text{sella} & n^0 = 0 \quad n^+ n^- \neq 0 \end{cases} \end{cases}
$$

2. STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI

PROBLEMI

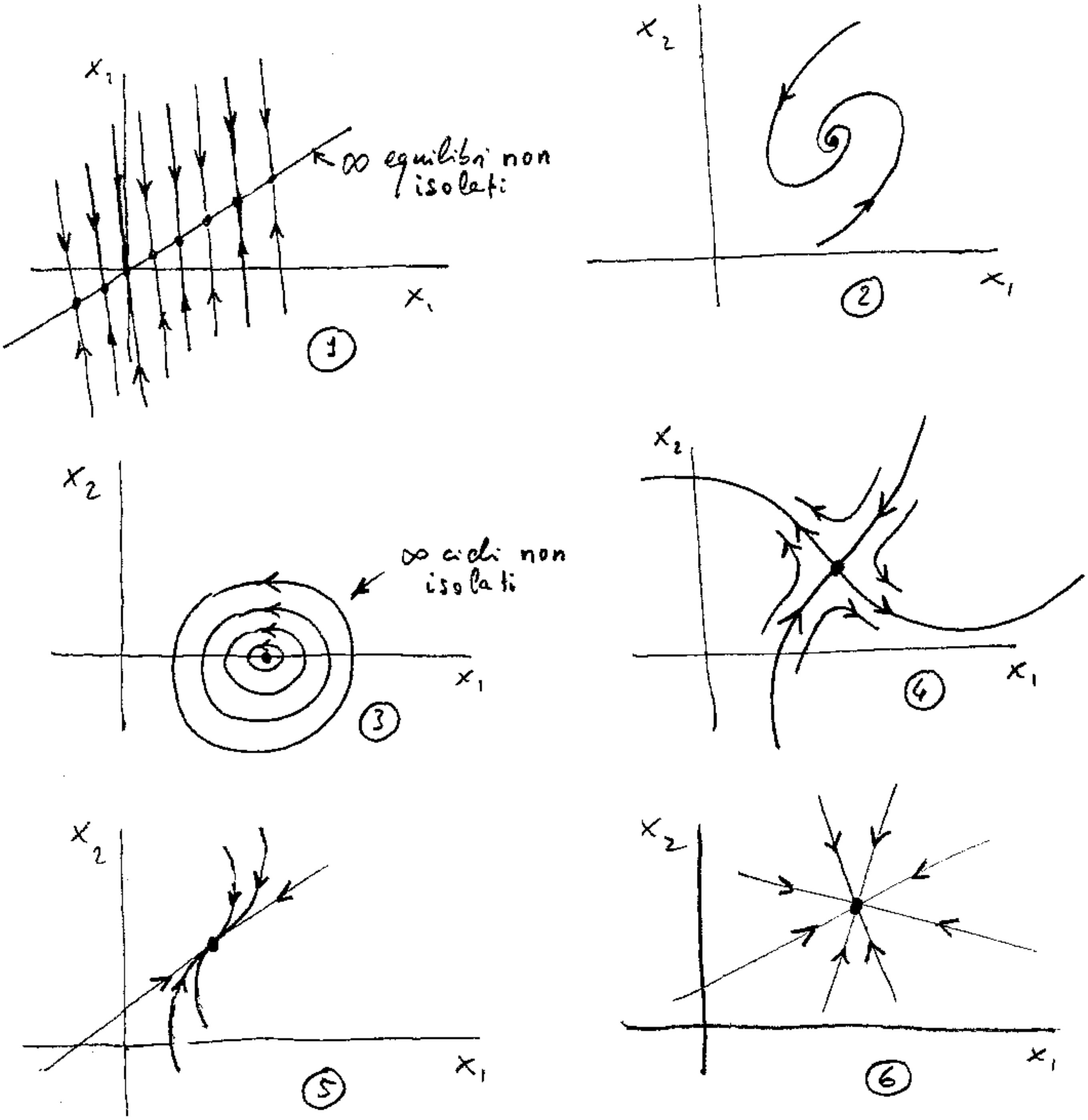
P. 1

Per rendere più realistico il modello di Fibonacci si supponga che ogni coppia di conigli adulti generi, in media, f coppie di conigli giovani (f=fertilità) e che le probabilità di sopravvivenza di conigli giovani e adulti siano, rispettivamente, s_g e s_a.

- Si cerchi di individuare la condizione che deve esistere sui parametri (f, s_g, s_a) affinchè la popolazione cresca indefinitamente (instabilità).
- Si scrivano le equazioni di stato e si determini, in particolare, la matrice A.
- Si calcolino gli autovalori di A e si determini la condizione di instabilità (confrontandola con quella trovata in precedenza).

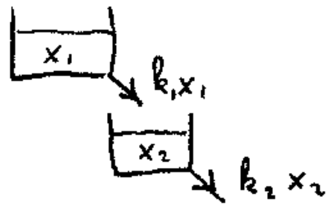
P. 2

Si dica quale di questi 6 quadri di traiettorie non può essere quello di un sistema lineare autonomo del II ordine a tempo continuo.



P. 3

Si consideri il seguente sistema idraulico, costituito da due serbatoi lineari (portata di uscita proporzionale a invaso).



Si descriva il sistema come sistema lineare $\dot{x} = Ax$. Si determinino gli autovalori del sistema e i corrispondenti autovettori. Sulla base di queste informazioni si rappresenti l'andamento delle traiettorie (nel far questo, si tengano distinti il caso in cui il serbatoio *1* si scarica più in fretta del serbatoio *2* (cioè $k_1 > k_2$) da quello opposto ($k_2 > k_1$)). Si interpreti intuitivamente il quadro di stato.

SOLUZIONI

2. STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI

S. 1

- Seguiamo la vita di K coppie di conigli neonati

$$\begin{array}{lccccccccccc}
 & \text{anno } 0 & & \text{anno } 1 & & \text{anno } 2 & & \text{anno } 3 & & \text{anno } 4 & & \\
 & K & \longrightarrow & K s_g & \longrightarrow & K s_g s_a & \longrightarrow & K s_g s_a^2 & \longrightarrow & K s_g s_a^3 & \longrightarrow & \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\text{figli} & 0 & & K s_g f & & K s_g s_a f & & K s_g s_a^2 f & & K s_g s_a^3 f & & \cdots
\end{array}$$

Quindi il contributo di K coppie giovani sull'intera popolazione è

$$K\, s_g\, f \left(1 + s_a + s_a^2 + s_a^3 + \cdots\right) = K\, s_g\, f \, \frac{1}{1 - s_a}$$

Ma, allora, la popolazione esplode se il numero dei figli è superiore al numero dei genitori, cioè se

$$\frac{K\, s_g\, f}{1 - s_a} > K$$

Quindi, la condizione di esplosione demografica (instabilità) è

$$s_g f > 1 - s_a \qquad (*)$$

Questa condizione è verificata nelle ipotesi di Fibonacci perchè $(1 - s_a) = 0$.

- $$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f\, x_2(t) \\ x_2(t+1) &= s_g\, x_1(t) + s_a\, x_2(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 0 & f \\ s_g & s_a \end{vmatrix}$$

- Calcolo autovalori

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -f \\ -s_g & \lambda - s_a \end{vmatrix} = \lambda^2 - s_a\lambda - f s_g$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - s_a\lambda - f s_g = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{s_a \mp \sqrt{s_a^2 + 4 f s_g}}{2}$$

Quindi, gli autovalori sono reali, uno positivo e uno negativo, e l'autovalore più grande in modulo è quello positivo.

La condizione di instabilità è, pertanto,

$$\frac{s_a + \sqrt{s_a^2 + 4 f s_g}}{2} > 1$$

che diventa

$$\sqrt{s_a^2 + 4 f s_g} > 2 - s_a \Rightarrow \cancel{s_a^2} + 4 f s_g > 4 - 4 s_a + \cancel{s_a^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f s_g > 1 - s_a} \quad (\text{vedi } (*))$$

S. 2

Il quadro (4) è quello di un sistema non lineare perchè le traiettorie che tendono verso la sella (varietà stabile) e quelle che divergono dalla sella (varietà instabile) non sono rettilinee.

S. 3

Le equazioni di stato (bilancio di masse) sono

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1 \qquad\qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{vmatrix}$$
$$\dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2$$

Poichè A è in forma triangolare i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale, cioè

$$\lambda_1 = -k_1 \qquad\qquad \lambda_2 = -k_2$$

Ad ognuno di questi due autovalori reali λ_i è associato un autovettore $x^{(i)}$ che, per definizione, soddisfa la relazione

$$A\, x^{(i)} = \lambda_i\, x^{(i)}$$

<u>Autovettore $x^{(i)}$</u>

$$\begin{vmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \underset{-k_i}{\lambda_i} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -k_1 x_1 = -k_i x_1 & \Rightarrow \; x_1 = \text{qualsiasi} \\ k_1 x_1 - k_2 x_2 = -k_i x_2 & \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 2 \\ \text{qualsiasi} & \text{se } i = 1 \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} \text{qualsiasi} & \text{se } i = 2 \\ \dfrac{k_1}{k_2 - k_1}\, x_1 & \text{se } i = 1 \end{cases}$$

Pertanto, i due autovettori sono

$$x^{(1)} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \dfrac{k_1}{k_2 - k_1}\,\alpha \end{vmatrix} \qquad\qquad x^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 \\ \beta \end{vmatrix}$$

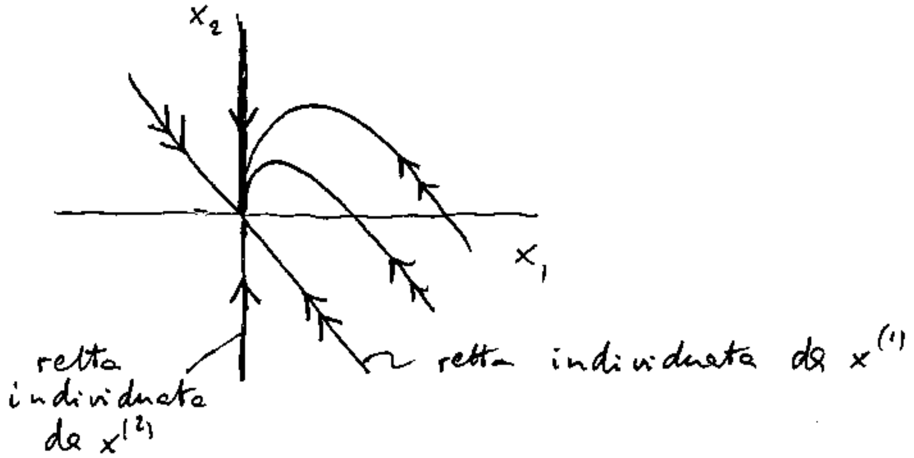
$\alpha \neq 0$ qualsiasi $\qquad\qquad$ $\beta \neq 0$ qualsiasi

Caso $k_1 > k_2$ (il serbatoio a monte si scarica più in fretta)

L'autovettore dominante (quello associato al transitorio più lento) è il secondo, cioè

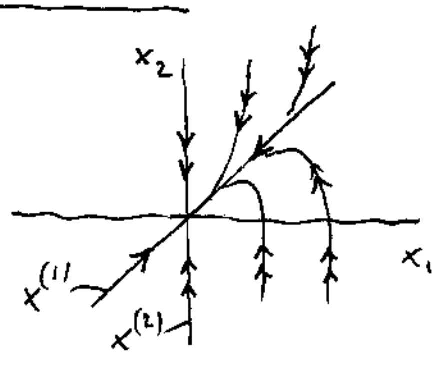
$$x^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 \\ \beta \end{vmatrix}$$

mentre $x^{(1)}$ è quello associato alla scarica del primo serbatoio, che è più rapida



Leggendo il quadro solo nel primo quadrante (livelli positivi) si vede che mentre il primo serbatoio si scarica il secondo inizialmente si riempie e poi alla fine si scarica lentamente quando il primo è ormai quasi vuoto.

Caso $k_2 > k_1$ (il serbatoio a valle si scarica più in fretta)



in questo caso il serbatoio 1 si scarica lentamente e, quindi, mantiene carico anche il serbatoio di valle