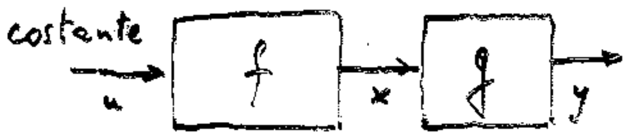
3. EQUILIBRI [6h]

- Definizione. Molteplicità. Metodi grafici (isocline e metodo di Moran).
- Definizione di stabilità. Bacino di attrazione. Esempi.
- Metodo della linearizzazione. Esempi di applicazione (crescita logistica, malattie genetiche).
- Esempio: l'uso degli antibiotici per la cura delle infezioni.
- Metodo di Liapunov e estensioni di Krasovski e La Salle.
- Esempi: l'equazione di Van der Pol; la competizione è stabilizzante.
- Problemi
- Soluzioni

EQUILIBRIO



un sistema con ingresso costante è all'equilibrio se anche x e y sono costanti

Equilibrio $\simeq$ regime stazionario

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = g(x, u)$$

se u e x sono costanti anche y è costante per cui la definizione di equilibrio può essere più concisa:

un sistema senza ingresso o con ingresso costante è all'equilibrio se x è costante

$\dot{x} = f(x)$	$x(t+1) = f(x(t))$
equilibri = soluzioni di $f(x) = 0$	equilibri = soluzioni di $x = f(x)$

$f(x) = 0$ e $f(x) = x$ sono sistemi di n equazioni in n incognite $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{idem} = x_1 \\ \text{idem} = x_2 \\ \\ \text{idem} = x_n \end{cases}$$

Molteplicità

Nei sistemi lineari fissato l'ingresso $\bar{u}$ gli stati di equilibrio sono le soluzioni di

$$A x + b \bar{u} = 0$$

caso dei sistemi a tempo continuo

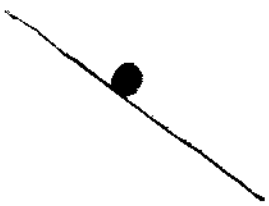
$$\Downarrow$$

$$A x = - b \bar{u}$$

$$A x = \text{vettore assegnato}$$

$$\Downarrow$$

un solo equilibrio (se $\det A \neq 0$) oppure nessun equilibrio oppure ∞ equilibri (non numerabili)



nessun equilibrio

un equilibrio.

due equilibri

tre equilibri ← impossibile in un sistema lineare

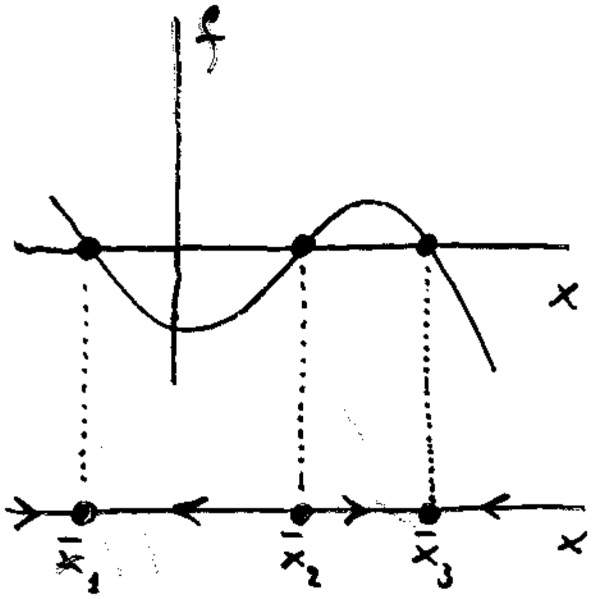
infinità numerabile di equilibri

infinità non numerabile di equilibri

Metodi grafici

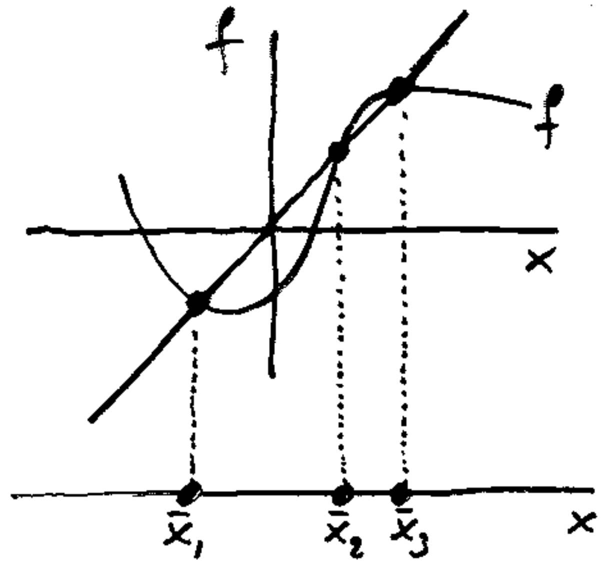
Sistemi del I ordine

$\dot{x} = f(x)$



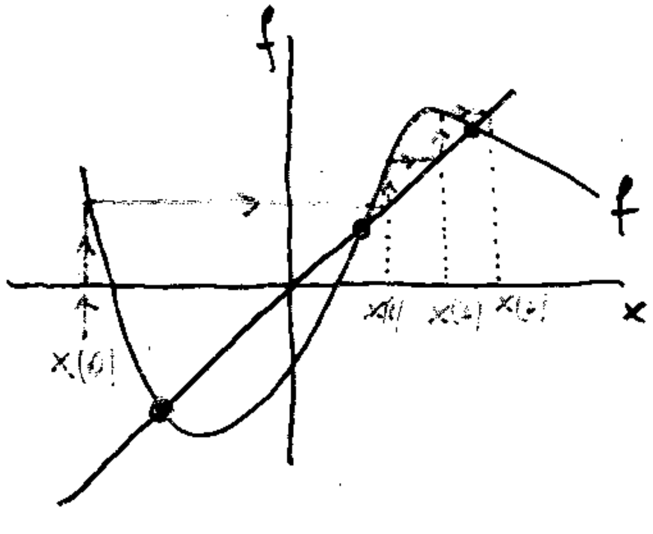
- se si parte da $\bar{x}_2$ si resta in $\bar{x}_2$
- se si parte a sinistra di $\bar{x}_2$ si tende verso $\bar{x}_1$
- se si parte a destra di $\bar{x}_2$ si tende verso $\bar{x}_3$

$x(t+1) = f(x(t))$



in questo caso è più difficile determinare l'evoluzione del sistema

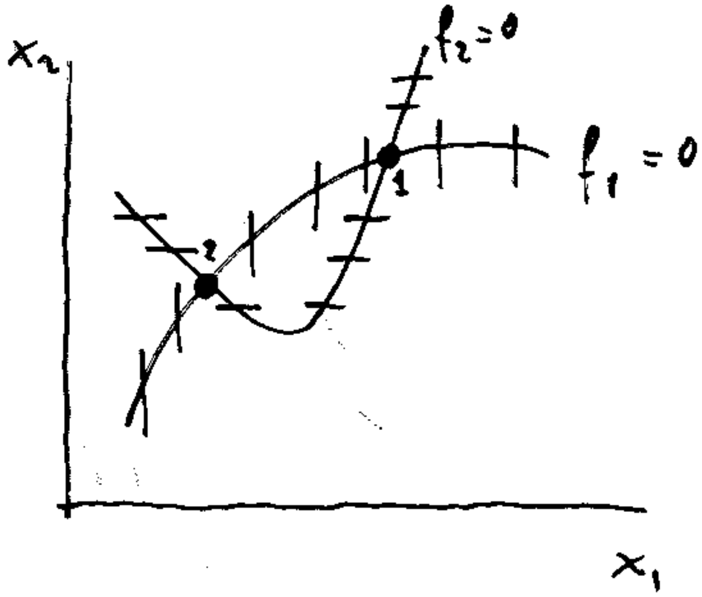
$\Downarrow$ metodo di Moran



quindi partendo da x(0) non si tende verso l'equilibrio più vicino, ma lo si scavalca per andare verso quello più lontano

Metodo delle isocline : sistemi a tempo continuo del II ordine

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1\ x_2)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1\ x_2)$$



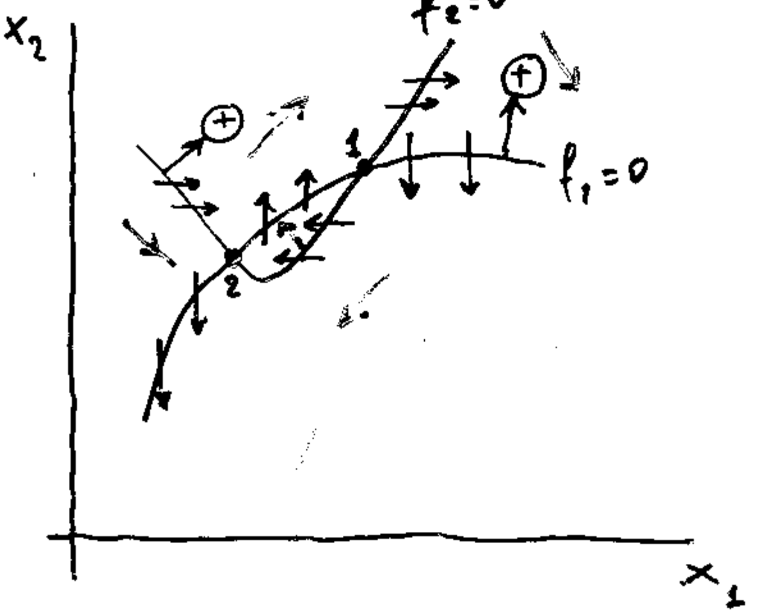
$\dot{x}_1 = 0$ significa $x_1 = \text{cost}$, cioè traiett. verticale

$\dot{x}_2 = 0$ . . .

. . . orizzontale

gli equilibri sono le intersezioni delle isocline

Per capire come evolve il sistema bisogna sapere da che parte dell'isoclina $f_i = 0$ si ha $f_i > 0$ (cioè $\dot{x}_i > 0$)



Le traiettorie spiralano in senso orario intorno al punto 1 (ma non si può dire se convergono o divergono)

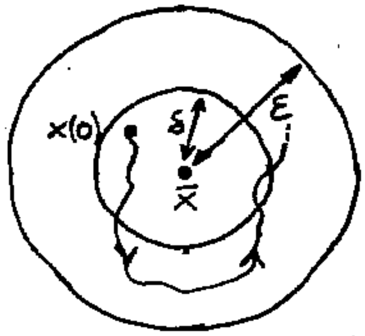
Le traiettorie divergono dal punto 2

STABILITÀ

Definizione
Un equilibrio $\overline{x}$ è stabile (localmente) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x(0)-\overline{x}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)-\overline{x}\| < \varepsilon \quad \forall x(0), \forall t \geq 0$$

[Qualunque piccola perturbazione dello stato non porta il sistema lontano dall'equilibrio.]



Definizione
Un equilibrio $\overline{x}$ è asintoticamente stabile se è stabile e se

$$x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \overline{x} \quad \forall x(0)$$

[Qualunque piccola perturbazione dello stato viene asintoticamente riassorbita.]

Definizione
Un equilibrio $\overline{x}$ è instabile se non è stabile.

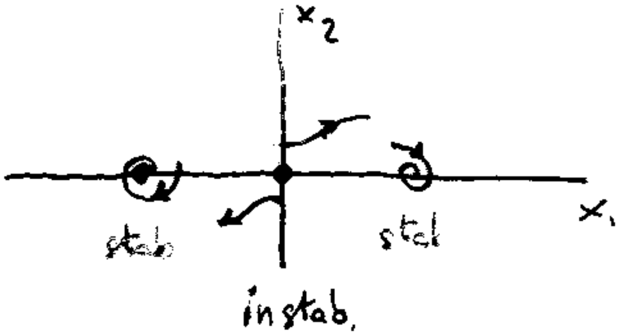
Definizione
Dato un equilibrio $\overline{x}$ asintoticamente stabile, l'insieme

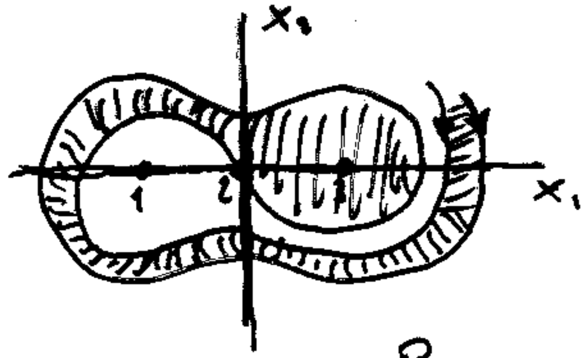
$$B(\overline{x}) = \{x(0) : x(t) \to \overline{x}\}$$

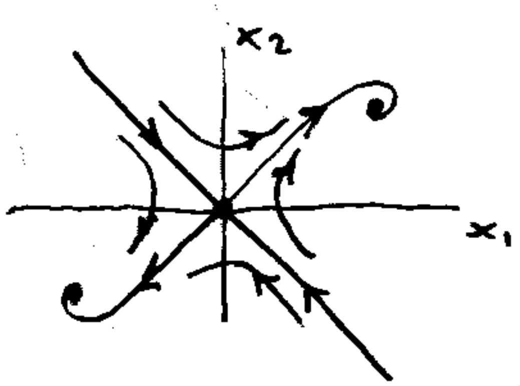
è detto bacino di attrazione di $\overline{x}$.

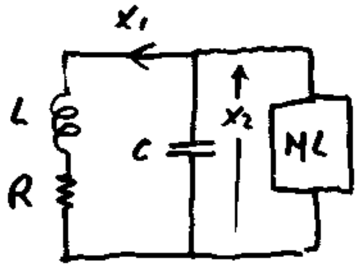
Definizione
Un equilibrio $\overline{x}$ asintoticamente stabile è detto globalmente stabile se $B(\overline{x}) = \mathbb{R}^n$ (con l'eccezione al più di un insieme di misura nulla).

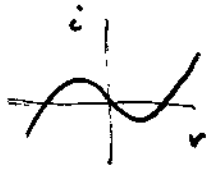
Vedi Esempio 8 capitolo 1



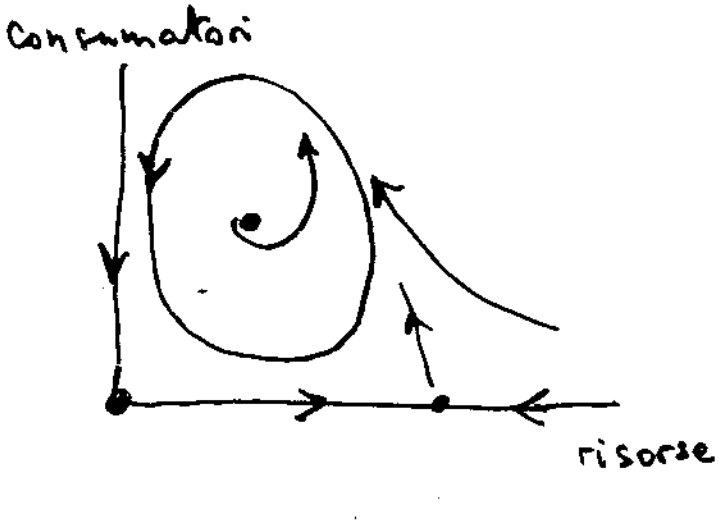








3 equilibri : due stabili e uno instabile



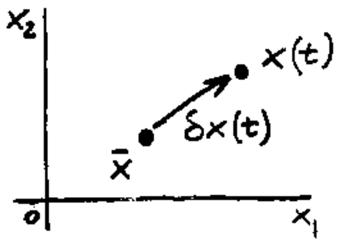
3 equilibri : tutti instabili

(2 selle e 1 fuoco instabile)

Il Sistema Linearizzato e la Matrice Jacobiana

Consideriamo $\dot{x}(t) = f(x(t))$ e un suo equilibrio $\overline{x}$ $(f(\overline{x}) = 0)$.

$$\partial x(t) = x(t) - \overline{x}$$



$\partial x(t)$ è governato dall'equazione di stato

$$\partial \dot{x}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(\overline{x} + \partial x(t)) = f(\overline{x}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\overline{x}} \partial x(t) + O(\partial x(t)^2)$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\overline{x}} \partial x(t) + O(\partial x(t)^2)$$

Definiamo sistema linearizzato nell'intorno di $\overline{x}$ il sistema lineare che si ottiene troncando lo sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$\partial \dot{x}(t) = J(\overline{x}) \partial x(t)$$

dove $J(x)$ è la matrice Jacobiana $(n \times n)$

$$J(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

VARIETÀ STABILE, INSTABILE, CENTRO

Se $J(\overline{x})$ possiede

$$\begin{gathered} n^- \text{ autovalori con } Re(\lambda) < 0 \\ n^+ \text{ autovalori con } Re(\lambda) > 0 \\ n^0 \text{ autovalori con } Re(\lambda) = 0 \end{gathered}$$

allora nell'intorno di $\overline{x}$ esistono

$$\begin{gathered} W^s = \text{varietà stabile } (\dim W^s = n^-) \\ W^u = \text{varietà instabile } (\dim W^u = n^+) \\ W^0 = \text{varietà centro } (\dim W^0 = n^0) \end{gathered}$$

tali che

- sono invarianti ($x(0) \in W^{s,u,0}$ implica $x(t) \in W^{s,u,0} \quad \forall t \geq 0$)

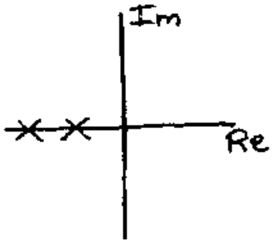
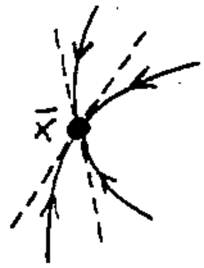
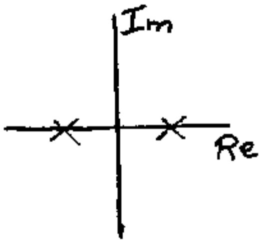
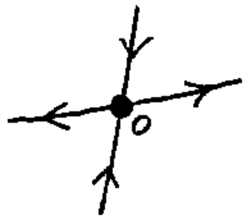
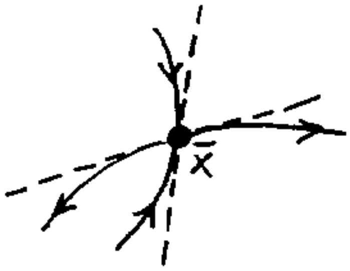
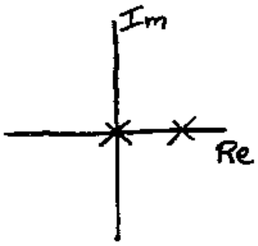
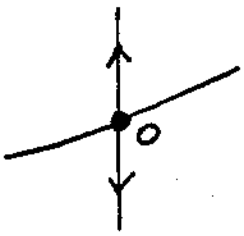
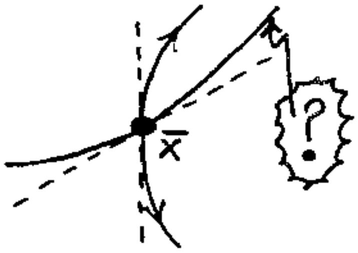
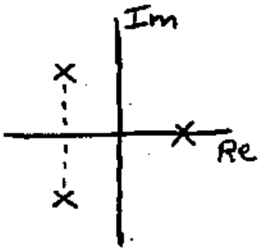
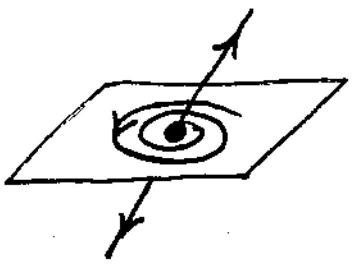
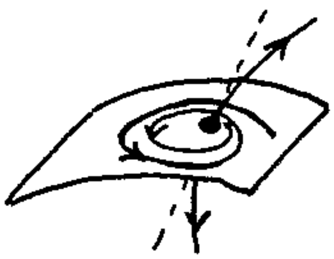
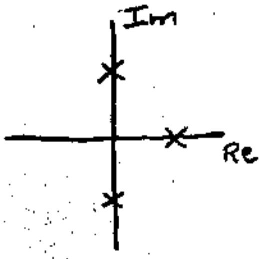
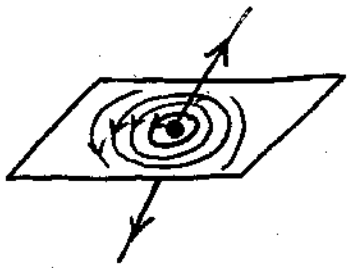
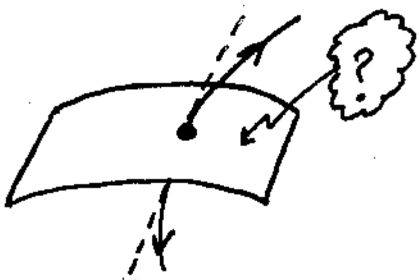
- sono tangenti in $\overline{x}$ alle corrispondenti varietà del sistema linearizzato

- la dinamica su W^s e su W^u è equivalente a quella del sistema linearizzato

- la dinamica su W^0 dipende invece dai termini di ordine superiore al primo dello sviluppo di Taylor ($O(\partial x(t)^2)$) $\Rightarrow$ non può essere studiata per mezzo del sistema linearizzato

Nota Bene: nel caso di sistema a tempo discreto $x(t+1)=f(x(t))$, il sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio $\overline{x}$ si definisce in modo del tutto analogo. Le varietà stabile, instabile, centro, sono associate rispettivamente agli autovalori con $|\lambda| < 1$, $|\lambda| > 1$, $|\lambda| = 1$.

ESEMPI

autovalori di J	$\partial\dot{x} = J(\bar{x})\partial x$	$\dot{x} = f(x)$
		
		
		
		
		

Linearizzazione e Stabilità

Le proprietà relative a W^s, W^u, W^0 implicano i risultati seguenti.

Teorema

$$J(\bar{x}) \text{ asintoticamente stabile} \Rightarrow \bar{x} \text{ asintoticamente stabile}$$

$J(\bar{x})$ asintoticamente stabile significa che $J(\bar{x})$ ha tutti gli autovalori strettamente stabili ($\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ o $|\lambda_i| < 1$ $\forall i$).

Teorema

$$J(\bar{x}) \text{ esponenzialmente instabile} \Rightarrow \bar{x} \text{ instabile}$$

$J(\bar{x})$ esponenzialmente instabile significa che $J(\bar{x})$ ha almeno un autovalore strettamente instabile ($\exists i$ tale che $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ o $|\lambda_i| > 1$).

Esempio: crescita logistica:

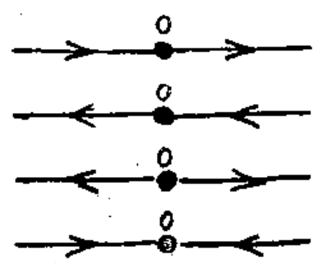
$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad \Rightarrow \quad J(x) = r\left(1 - 2\frac{x}{k}\right)$$

$$\text{2 equilibri: } \begin{cases} \bar{x} = 0, & J(0) = r, \quad \text{instabile} \\ \bar{x} = k, & J(k) = -r, \quad \text{asintoticamente stabile} \end{cases}$$

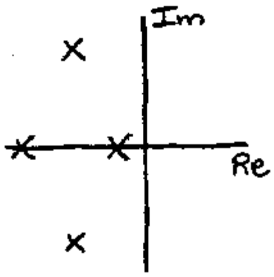
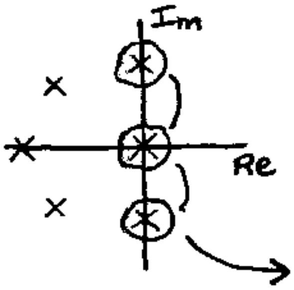
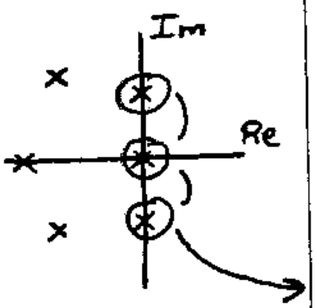
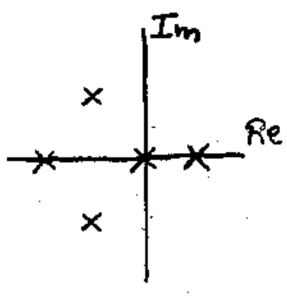
Nota Bene: se $J(\bar{x})$ è semplicemente stabile o debolmente (non esponenzialmente) instabile non si può dedurre nulla a proposito della stabilità di $\bar{x}$.

Esempio: sistemi quadratici e cubici:

$$\begin{array}{llll} \dot{x} = x^2, & \bar{x} = 0, & J(x) = 2x, & J(\bar{x})=0 \Rightarrow ??? \\ \dot{x} = -x^2, & \bar{x} = 0, & J(x) = -2x, & J(\bar{x})=0 \Rightarrow ??? \\ \dot{x} = x^3, & \bar{x} = 0, & J(x) = 3x^2, & J(\bar{x})=0 \Rightarrow ??? \\ \dot{x} = -x^3, & \bar{x} = 0, & J(x) = -3x^2, & J(\bar{x})=0 \Rightarrow ??? \end{array}$$



ESEMPI

autovalori di J	$\partial\dot{x} = J(\overline{x})\partial x$	$\overline{x}$
	ASINTOTICAM. STABILE	ASINTOTICAMENTE STABILE (esponenzialmente)
	SEMPLICEMENTE STABILE radici SEMPLICI del polinomio minimo	?
	INSTABILE (debolmente) almeno uno è radice MULTIPLA del polinomio minimo	?
	INSTABILE (fortemente)	INSTABILE (esponenzialmente)

Esempi

1. **Modello di crescita logistica**

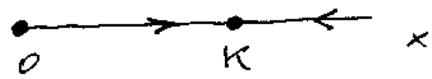
$$\dot{x} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) = f(x)$$

Equilibri: $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = K$

Linearizzazione: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = r - \dfrac{2rx}{K}$

$\left[r - \dfrac{2rx}{K}\right]_1 = r$ instabile

$\left[r - \dfrac{2rx}{K}\right]_2 = -r$ stabile



2. **Malattie ereditarie (anemia mediterranea, ...)**

$$x(t+1) = \frac{1}{2 - x(t)} = f(x(t))$$

$x(t)$ = probabilità di essere sano alla t-esima generazione

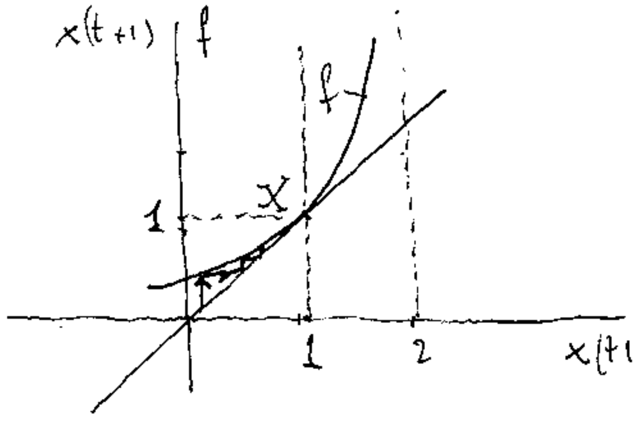
Equilibri

$$x = \frac{1}{2-x} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{(radice doppia)}$$

Linearizzazione $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{(2-x)^2} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}} = \dfrac{1}{(2-1)^2} = 1$

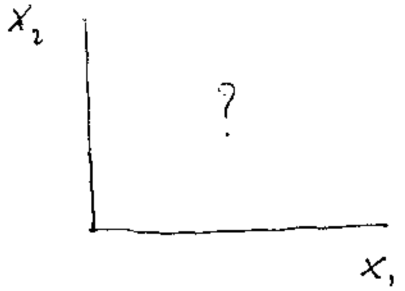
Il sistema linearizzato è semplicemente stabile
Quindi non si può concludere alcunché sulla stabilità dell'equilibrio

Usiamo il metodo di Moran



da sinistra si converge verso X quindi la malattia sparisce ma molto lentamente (con legge più lenta di qualsiasi esponenziale)

INFEZIONE BATTERICA E CURA



x_1 = batteri utili

x_2 = batteri nocivi

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - \alpha x_1 x_2 = x_1 \left[r_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - \alpha x_2 \right] = x_1 F_1(x_1, x_2)$$

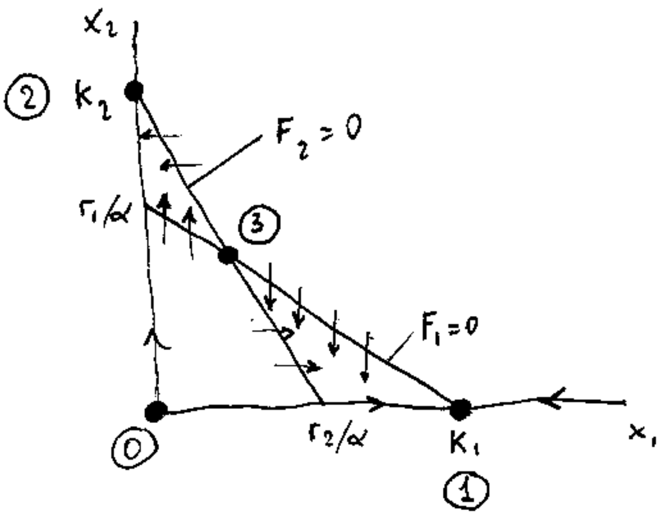
$$\dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - \alpha x_1 x_2 = x_2 \left[r_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - \alpha x_1 \right] = x_2 F_2(x_1 x_2)$$

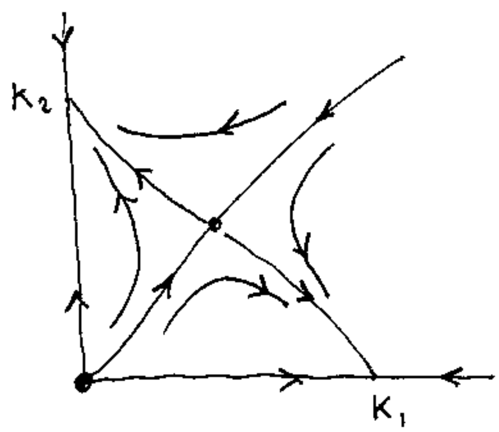
competizione elevata $\Rightarrow \alpha$ grande $\Rightarrow \left[\alpha > \frac{r_1}{K_2} , \alpha > \frac{r_2}{K_1} \right] (*)$

<u>Equilibri</u>

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ F_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{r_1}{\alpha}\left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ F_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{r_2}{\alpha}\left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) \end{cases}$$





Dobbiamo dimostrare che 0 è un repulsore (nodo instabile)

1 e 2 sono attrattori (nodi stabili)

3 è una sella

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1\, F_1(x_1\, x_2) = x_1\left[r_1\left(1-\frac{x_1}{K_1}\right)-\alpha x_2\right] \\ \dot{x}_2 = x_2\, F_2(x_1\, x_2) = x_2\left[r_2\left(1-\frac{x_2}{K_2}\right)-\alpha x_1\right] \end{cases}$$

$$J = \left|\begin{matrix} F_1 + x_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & x_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ x_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & F_2 + x_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{matrix}\right|_{\bar{x}}$$

$$J_0 = \left|\begin{matrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{matrix}\right| \qquad \text{nodo instabile}$$

$$J_1 = \left|\begin{matrix} K_1\left(-\frac{r_1}{K_1}\right) & K_1(-\alpha) \\ 0 & r_2 - \alpha K_1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} (-) & (-) \\ 0 & (-) \end{matrix}\right| \qquad \text{nodo stabile}$$

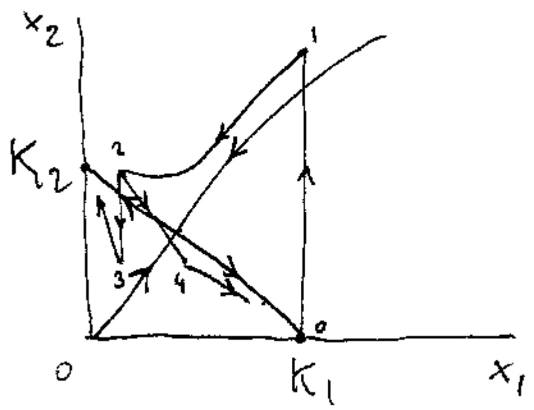
$(*)$

$$J_2 = \left|\begin{matrix} r_1 - \alpha K_2 & 0 \\ K_2(-\alpha) & K_2\left(-\frac{r_2}{K_2}\right) \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} (-) & 0 \\ (-) & (-) \end{matrix}\right| \qquad \text{nodo stabile}$$

$$J_3 = \left|\begin{matrix} \bar{x}_1\left(-\frac{r_1}{K_1}\right) & \bar{x}_1(-\alpha) \\ \bar{x}_2(-\alpha) & \bar{x}_2\left(-\frac{r_2}{K_2}\right) \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} -\frac{r_1}{K_1}\bar{x}_1 & -\alpha\bar{x}_1 \\ -\alpha\bar{x}_2 & -\frac{r_2}{K_2}\bar{x}_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{tr} J_3 < 0 \\ \det J_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\left(\frac{r_1 r_2}{K_1 K_2} - \alpha^2\right) \end{array}$$

sella $\quad < 0 \;\; (*)$

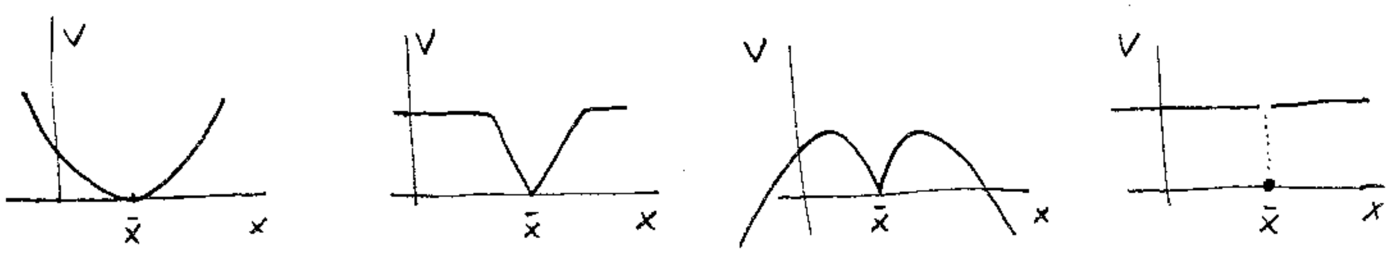
<u>Cura</u>: antibiotici + ricostituenti di flora intestinale



FUNZIONI DEFINITE POSITIVE

__Definizione__ Una funzione $V(x)$ è __definita positiva__ in $\bar{x}$ se si annulla in $\bar{x}$ e se è positiva negli altri punti di un intorno di $\bar{x}$.

__Esempi di funzioni definite positive__



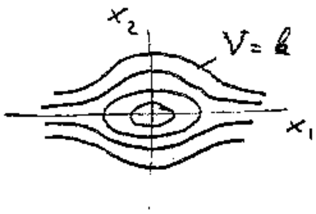
__Definizione__ Una funzione è __semidefinita positiva__ in $\bar{x}$ se si annulla in $\bar{x}$ ed è non negativa in un intorno di $\bar{x}$.

__Definizione__ Una funzione V è __definita__ (__semidefinita__) __negativa__ se $-V$ è definita (semidefinita) positiva

__Proprietà__ Se una funzione V definita positiva è continua insieme alle sue derivate allora le linee di livello $V = k$ sono chiuse e limitate per k sufficientemente piccolo

__Esempio__ (funzione di Letov)

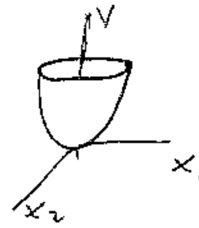
$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2$$



linee chiuse per $k < 1$

Funzioni quadratiche

$$V = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{22} x_2^2 + a_{21} x_2 x_1 + \dots$$



$$= x^T A x \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Osservazione: non è limitativo immaginare $a_{ij} = a_{ji}$ $(A = A^T)$

Condizione di Sylvester

$$A \text{ def. positiva} \iff D_i > 0 \quad \forall i$$

$$D_1 = a_{11}$$

$$D_2 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

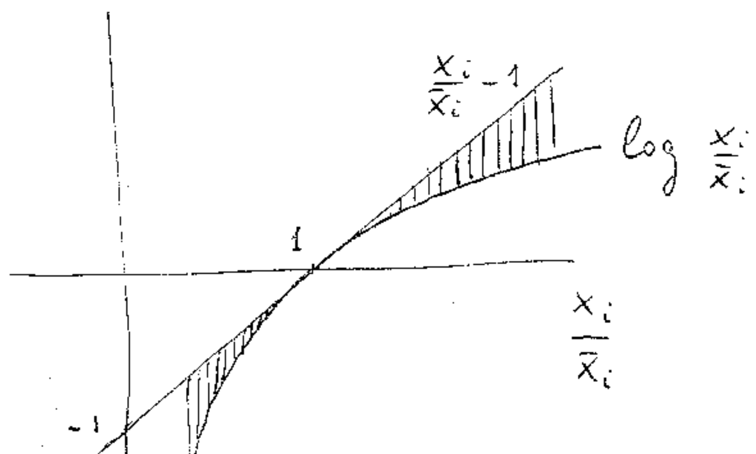
$$D_3 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\vdots$

{ Si noti che A def. posit. $\Rightarrow D_n > 0$ ma $D_n = \det A$ quindi A non singol. }

Funzione di Volterra

$$V = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{x_i}{\bar{x}_i} - 1 - \log \frac{x_i}{\bar{x}_i} \right) \qquad b_i > 0 \qquad \bar{x}_i > 0$$



Questa funzione è usata nello studio della stabilità degli equilibri di sistemi positivi del tipo $\dot{x}_i = x_i f_i(x_1 \dots x_n)$.

I METODI DI LIAPUNOV, KRASOWSKI E LA SALLE

$\dot{x} = f(x, \bar{u})$ $\qquad \bar{x}$ = equilibrio

Metodo di Liapunov

$$\left.\begin{array}{l} V(x) = \text{def. pos. in } \bar{x} \\ V(x) = \text{continua in } \bar{x} \text{ con le sue derivate} \\ (*)\ \dot{V}(x) = \text{def. neg. in } \bar{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} = \text{as. stabile}$$

Metodo di Krasowski

$K = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$

$$\left.\begin{array}{l} V(x) = \text{def. pos. in } \bar{x} \\ V(x) = \text{continua in } \bar{x} \text{ con le sue derivate} \\ (**)\left\{\begin{array}{l} \dot{V}(x) = \text{semidef. neg. in } \bar{x} \\ \nexists \text{ traiett. perturb. in } K \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} = \text{as. stab.}$$

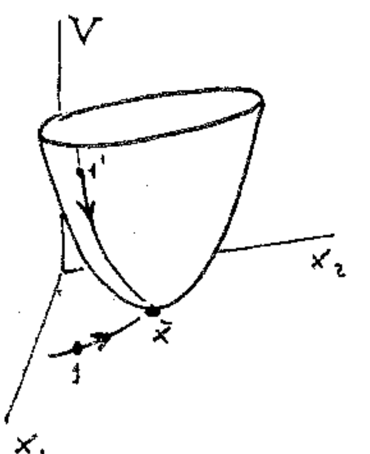
Inoltre, se le condizioni valgono in grande all'interno della regione

$$\Omega_k = \{x : V(x) \leq k\}$$

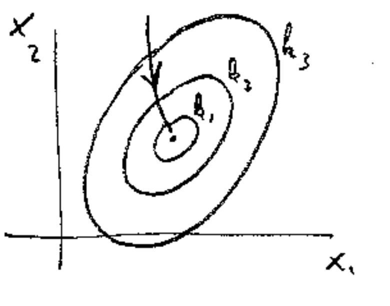
e se Ω_k è chiuso e limitato (cioè se la linea di livello $V(x) = k$ è chiusa) allora

$$\boxed{\Omega_k \subset \mathbf{B}(\bar{x}, \bar{u})}$$ criterio di La Salle

Dimostrazione $\dot{V} = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x} f = \dfrac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dfrac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \cdots + \dfrac{\partial V}{\partial x_n} f_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i$

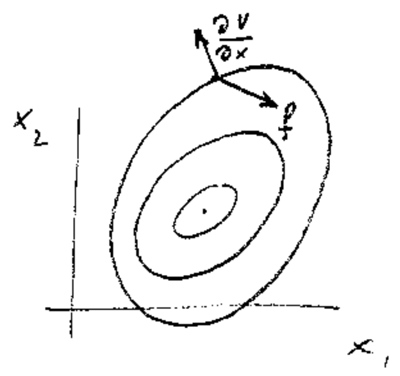


$\dot{V} < 0 \Rightarrow$ si scende lungo la superficie



$k_1 < k_2 < k_3$

$\dot{V} < 0 \Rightarrow$ si attraversano linee di livello dall'esterno all'interno

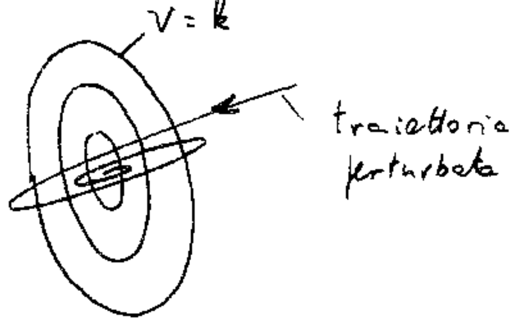


$\dfrac{\partial V}{\partial x} \cdot f < 0$

prodotto scalare negativo

<u>Osservazione</u> La funzione V si dice di Liapunov quando soddisfa le condizioni su $\dot{V}$. Pertanto, una funzione V può essere di Liapunov per un certo sistema ma non esserlo per un altro

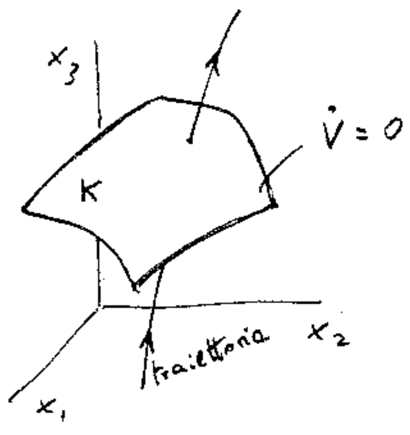
<u>Caso di funzione V mal scelta</u>



In certi punti x si ha $\dot{V} > 0$ mentre in altri si ha $\dot{V} < 0$

<u>conclusione</u> perché una funzione V sia di Liapunov bisogna che la geometria delle sue linee di livello sposi quella delle traiettorie

<u>Osservazione sulla condizione di Krasowski</u>



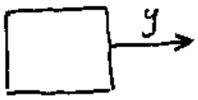
Il luogo di Krasowski K non contiene traiettorie perturbate se le traiettorie attraversano K trasversalmente

Ciò si può verificare facilmente studiando f per $x \in K$

Come si determinano funzioni di Liapunov

- V = energia (se possibile)
- V = famiglia di funzioni (con parametri) tra cui scegliere dopo aver calcolato $\dot{V}$
- con metodi ad hoc

Esempio : equazione di Van der Pol



$$\ddot{y} + \mu(y^2-1)\dot{y} + y = 0$$

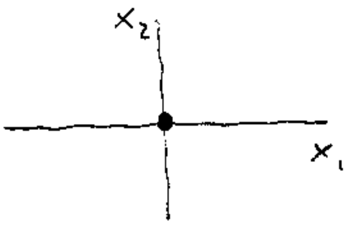
Questa equazione e' stata usata in numerose applicazioni (elettriche, biomediche, economiche, elettroniche, chimiche, ...)

Studiamo l'equazione di Van der Pol

$$\underbrace{\ddot{y}}_{\dot{x}_2} + \mu(\underbrace{y^2}_{x_1^2}-1)\underbrace{\dot{y}}_{x_2} + \underbrace{y}_{x_1} = 0 \qquad \text{per } \mu < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \mu(1-x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$



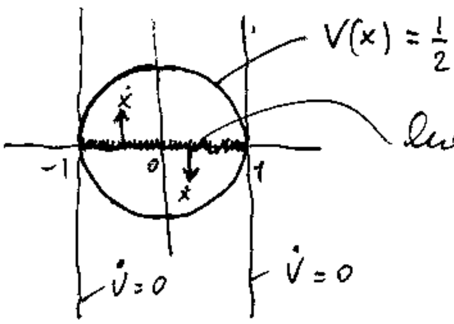
un solo equilibrio $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$

$$J = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underset{\ominus}{\mu} \end{vmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \mathrm{tr}\, J < 0 \\ \det J > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{x} = 0 \quad \text{as. stab.}$$

Supponiamo di voler determinare una approssimazione della regione di asintotica stabilita' $B(\bar{x})$.

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = \cancel{x_1 x_2} + x_2\mu(1-x_1^2)x_2 - \cancel{x_2 x_1}$$

$$= \underset{\ominus}{\mu}\, x_2^2(1-x_1^2)$$



luogo di Krasovski

All'interno della linea chiusa

$$V(x) = k = \frac{1}{2}$$

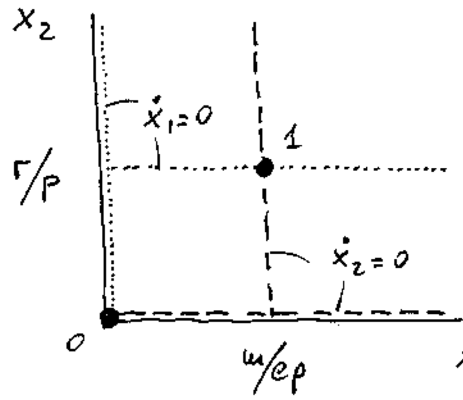
$$\text{abbiamo} \begin{cases} \dot{V} \leq 0 \\ \text{K non contiene traiettorie perturbate} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{il disco unitario} \\ \text{e' contenuto in } B(\bar{x}) \end{cases}$$

LA COMPETIZIONE E' STABILIZZANTE

il più antico modello risorse - consumatori è quello di Lotka [1924] e Volterra [1926]

Il modello senza competizione intraspecifica tra gli individui che costituiscono la risorsa è

$$\dot{x}_1 = r x_1 - p x_1 x_2 = x_1 \left[r - p x_2 \right] = x_1 F_1(x_2)$$
$$\dot{x}_2 = e p x_1 x_2 - m x_2 = x_2 \left[e p x_1 - m \right] = x_2 F_2(x_1)$$



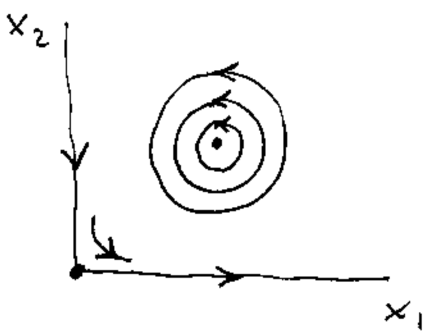
.... isocline $\dot{x}_1 = 0$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = r/p \end{cases}$

- - - isocline $\dot{x}_2 = 0$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = m/ep \end{cases}$

2 equilibri

$$J = \begin{vmatrix} F_1 + x_1 \cancel{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}} & x_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ x_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & F_2 + x_2 \cancel{\frac{\partial F_2}{\partial x_2}} \end{vmatrix} = \begin{cases} \xrightarrow{\text{in } 0} \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{vmatrix} & \text{sella} \\ \xrightarrow{\text{in } 1} \begin{vmatrix} 0 & -p\bar{x}_1 \\ ep\bar{x}_2 & 0 \end{vmatrix} & \text{centro} \end{cases}$$

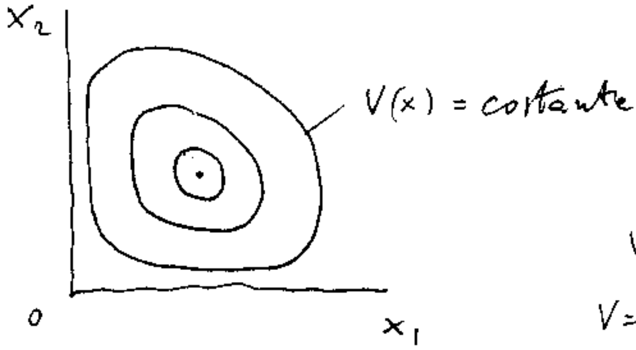
Le traiettorie del sistema linearizzato sono pertanto le seguenti



da questo risultato non si può però inferire alcunché sul comportamento del sistema nell'intorno dell'equilibrio positivo

$$V = \frac{1}{p}\left(x_1 - \bar{x}_1 - \bar{x}_1 \log \frac{x_1}{\bar{x}_1} \right) + \frac{1}{ep}\left(x_2 - \bar{x}_2 - \bar{x}_2 \log \frac{x_2}{\bar{x}_2} \right)$$

energia demografica totale



$V(\bar{x}) = 0$

$V(x)$ positivo

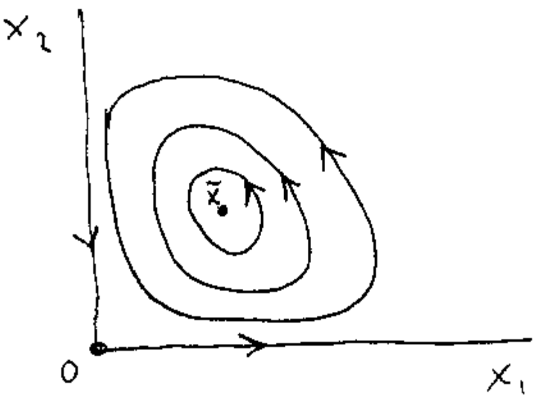
V continua con derivate cont.

V = cost. ⇒ linee chiuse

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = \cdots\cdots = 0$$

provare a fare i conti

Quindi l'energia demografica totale rimane costante lungo le traiettorie. Ciò significa che le traiettorie coincidono con le linee di livello $V = k$.
Quindi si hanno infiniti cicli non isolati (come nel sistema linearizzato).



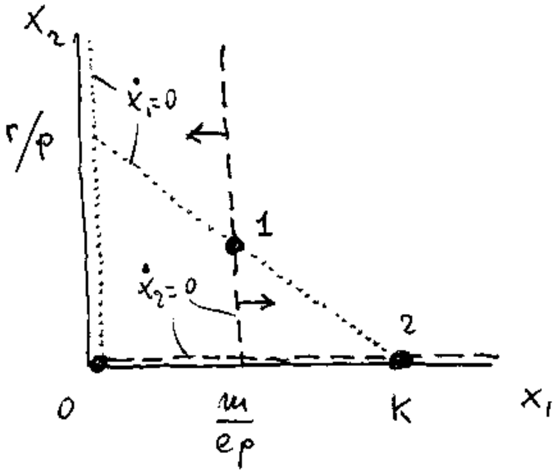
l'equilibrio $\bar{x}$ è semplicemente stabile e contornato da cicli non isolati

Introduciamo ora la competizione intraspecifica tra le risorse

competizione intraspecifica

$$\dot{x}_1 = r x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - p x_1 x_2 = x_1 \left[r\left(1-\frac{x_1}{K}\right) - p x_2 \right] = x_1 F_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = e p x_1 x_2 - m x_2 = x_2 \left[e p x_1 - m \right] = x_2 F_2(x_1)$$



.... isocline $\dot{x}_1 = 0$

– – – isocline $\dot{x}_2 = 0$

oltre agli equilibri 0 e 1 c'è anche l'equilibrio 2 (che tende all'infinito per $K \to \infty$)

Per dimostrare che la competizione è stabilizzante mostriamo che per K finito l'equilibrio 1 è globalmente stabile nel primo quadrante

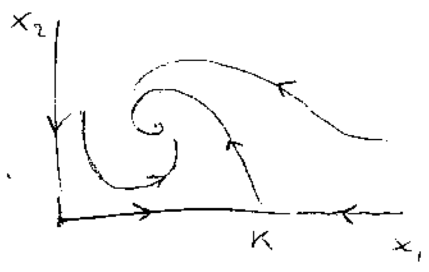
$V =$ come prima

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = \cdots\cdots = -\frac{r}{pK}\left(x_1 - \bar{x}_1\right)^2$$

$\dot{V}$ si annulla solo per $x_1 = \bar{x}_1 \Rightarrow K = \{ x : x_1 = \bar{x}_1 \}$

Ma il luogo di Krasowski è attraversato dalle traiettorie perchè $\dot{x}_1 < 0$ sopra l'isocline $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_1 > 0$ sotto la stessa isocline

Quindi $\bar{x}_1$ è globalmente stabile.



3. EQUILIBRI

PROBLEMI

P. 1

Il metodo di Newton (vedi Esempio 6 del Capitolo 1) viene utilizzato per calcolare (graficamente) gli zeri di una funzione $g(x)$ attraverso iterazioni successive descritte dall'equazione

$$x(t+1) = x(t) - \frac{g(x(t))}{g'(x(t))}$$

Dire perchè il metodo converge a una soluzione $\bar{x}$ pur di partire da una "soluzione di iterazione 0" $x(0)$ vicina a $\bar{x}$.

P. 2

Per risolvere un sistema di due equazioni in due incognite, scritte nella forma

$$\begin{cases} x_1 = g(x_2) \\ x_2 = h(x_1) \end{cases}$$

si usa il seguente metodo iterativo

$$\ldots \to x_1^{(t)} \to x_2^{(t)} = h(x_1^{(t)}) \to x_1^{(t+1)} = g(x_2^{(t)}) \to \ldots$$

Ammesso che esista una soluzione ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) dire sotto che condizioni il metodo converge.

P. 3

Si dimostri che nel sistema

$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2$

$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - x_2^3$

l'origine dello spazio di stato è uno stato di equilibrio globalmente stabile.

P. 4

Si dimostri che nel sistema

$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + (u-1)^2$

$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + x_2^2$

l'origine dello spazio di stato è uno stato di equilibrio per $u = \bar{u} = 1$ e che tale stato è asintoticamente stabile ma non globalmente stabile. Infine, si determini una sottoregione della regione di asintotica stabilità dell'origine.

SOLUZIONI

3. EQUILIBRI

S. 1

Il sistema dinamico

$$x(t+1) = f(x(t)) \qquad (*)$$

ha

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$$

Pertanto, lo Jacobiano è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{(g')^2 - g g''}{(g')^2}$$

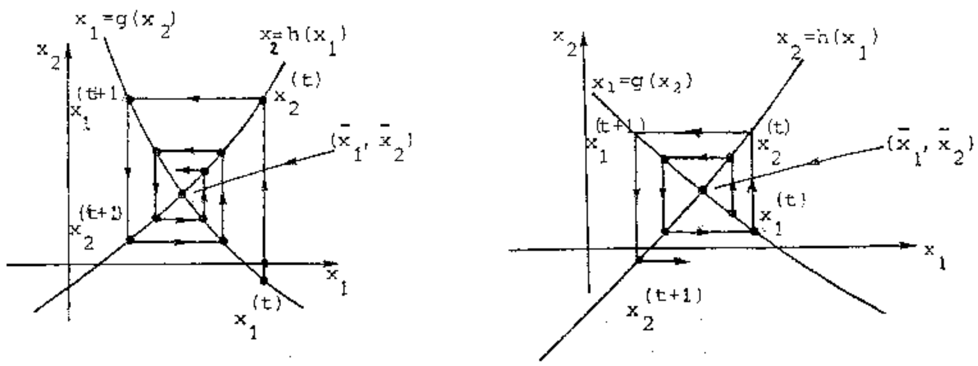
che valutato in $\bar{x}$ (dove $g(\bar{x}) = 0$) fornisce

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}} = 1 - \frac{(g')^2}{(g')^2} = 0$$

Il sistema linearizzato è, pertanto, asintoticamente stabile e quindi anche $\bar{x}$ è tale nel sistema $(*)$. Ciò significa che se $x(0)$ è vicino a $\bar{x}$ il metodo converge a $\bar{x}$.

S. 2

L'interpretazione geometrica del metodo iterativo, riportata in figura, mostra chiaramente che in certi casi il metodo converge mentre in altri diverge.



La condizione di convergenza è molto semplice da ricavare pur di notare che i successivi valori di x_1 e x_2 sono legati tra loro dalle relazioni

$$
\begin{aligned}
x_1^{(t-1)} &= g(h(x_1^{(t)})) \\
x_2^{(t+1)} &= h(g(x_2^{(t)})) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

In altre parole, tali valori sono lo stato di un sistema dinamico non lineare che ammette lo stato ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) come stato di equilibrio. Il sistema (1) può essere linearizzato nell'intorno di tale equilibrio e il suo Jacobiano è dato da

$$
J = \begin{bmatrix} \dfrac{dg}{dx_2}\dfrac{dh}{dx_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{dg}{dx_2}\dfrac{dh}{dx_1} \end{bmatrix}_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}
$$

I due autovalori del sistema linearizzato sono pertanto uguali e pari agli elementi che compaiono sulla diagonale di J. Pertanto, se

$$\left| \frac{dg}{dx_2}(\bar{x}_2)\frac{dh}{dx_1}(\bar{x}_1) \right| < 1$$

per il teorema delle linearizzazione lo stato di equilibrio $\bar{x}$ è asintoticamente stabile e il metodo iterativo converge (pur di partire da un valore $x_1^{(0)}$ sufficientemente vicino a $\bar{x}_1$).

S. 3

L'origine dello spazio di stato è effettivamente uno stato di equilibrio. Per dimostrare che esso è globalmente stabile consideriamo la seguente famiglia di funzioni

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \alpha x_2^2) \qquad\qquad \alpha > 0$$

Tali funzioni sono tutte definite positive e hanno linee di livello chiuse (ellissi). Inoltre,

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = x_1(-x_1 + 2x_2) + \alpha x_2(-2x_1 - x_2 - x_2^3) = -x_1^2 - \alpha x_2^2(1 + x_2^2) + 2(1-\alpha)x_1 x_2$$

Considerando la funzione V corrispondente al particolare valore di α che annulla il termine "misto" $x_1 x_2$, cioè α =1, si ottiene

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2(1 + x_2^2)$$

La funzione $\dot{V}$ è pertanto definita negativa e ciò prova la stabilità globale dell'origine.

S. 4

Ponendo u=1 e $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_1 = x_2 = 0$ nelle equazioni di stato si ottengono due identità per cui l'origine è, in effetti, uno stato di equilibrio. La matrice A del sistema linearizzato (ottenibile trascurando i termini non lineari delle equazioni di stato) è pertanto

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori $(\lambda = -1 \pm 2i)$ sono complessi coniugati con parte reale negativa. Per il teorema della linearizzazione l'origine è quindi uno stato di equilibrio asintoticamente stabile (fuoco stabile).

Che l'origine non sia globalmente stabile è, in questo caso, molto semplice da dimostrare, perché il sistema ammette per $u = \bar{u} = 1$ un secondo stato di equilibrio.

Infatti, le equazioni

$$-x_1 - 2x_2 = 0$$
$$-2x_1 - x_2 + x_2^2 = 0$$

ammettono, oltre alla soluzione nulla, anche la soluzione

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Per determinare una sottoregione della regione di asintotica stabilità possiamo far ricorso al criterio di La Salle usando la seguente funzione V

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

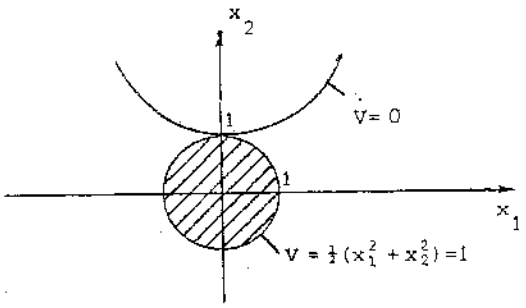
Per questo si calcola dapprima $\dot{V}$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = x_1(-x_1 + 2x_2) + x_2(-2x_1 - x_2 + x_2^2) = -x_1^2 - x_2^2(1 - x_2)$$

che è definita negativa nell'origine ma non in grande perché si annulla sulla linea

$$x_2^2(x_2 - 1) = x_1^2$$

Tale linea a $\dot{V} = 0$ è simmetrica rispetto ad x_1 (vedi figura) ed è caratterizzata da valori di $x_2 \geq 1$. Inoltre, i valori di x_2 di questa linea sono crescenti con $|x_1|$ e il minimo $(x_2 = 1)$ si ha quindi per $x_1 = 0$, come mostrato in figura



La regione

$$\Omega = \left\{ x : V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) < 1 \right\},$$

ossia il cerchio di raggio unitario, verifica le condizioni del criterio di La Salle (la frontiera di Ω è la linea di livello V=1 e $\dot{V}$ è definita negativa all'interno di Ω) ed è pertanto una sottoregione della regione di asintotica stabilità dell'origine. Poiché il cerchio di raggio unitario è tangente alla linea $\dot{V} = 0$, la regione Ω è la migliore approssimazione che si può dare con la funzione di Liapunov $V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$.

Per approssimare ulteriormente tale regione si potrebbe ripetere il procedimento usando una nuova funzione V.