

#### 4. CICLI [5h]

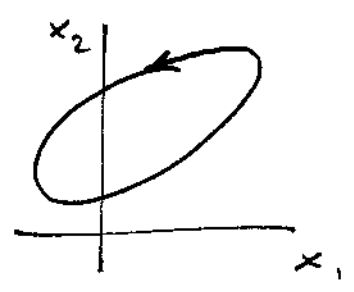
- Definizione. Esempi (rotazione agricola, caccia alla lince, bipolarismo e alternanza, ...).
- Stabilità. Sezione di Poincaré, mappa di Poincaré e sua linearizzazione.
- Criteri di non esistenza di Bendixon e Dulac.
- Criterio di esistenza di Poincaré.
- Teoria degli indici di Poincaré.
- *Problemi*
- *Soluzioni*

Un sistema dinamico non lineare senza ingressi:

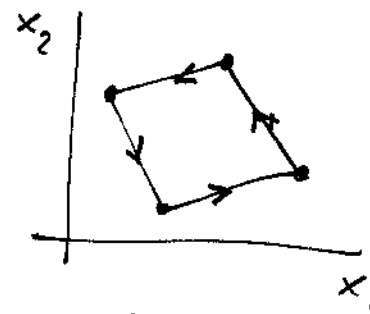
$$\dot{x} = f(x) \quad \text{o} \quad x(t+1) = f(x(t))$$

può avere comportamento periodico.

In altre parole, in tali sistemi possono esistere soluzioni periodiche. La visualizzazione nello spazio di stato fornisce traiettorie chiuse (cicli)

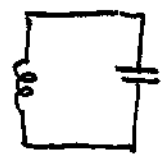


tempo continuo

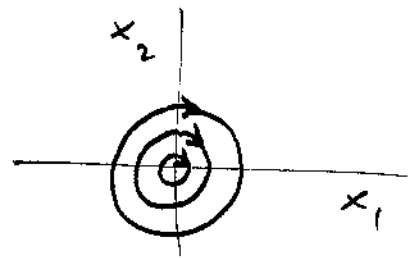


tempo discreto

I cicli possono anche essere non isolati come nei due sistemi seguenti:



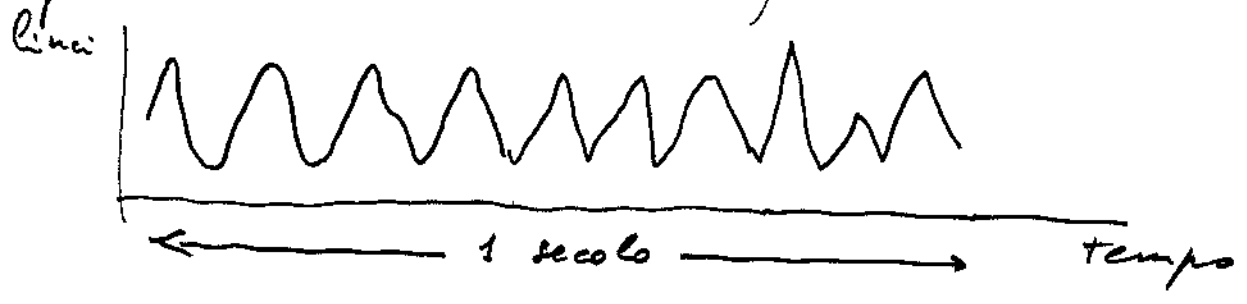
senza attrito



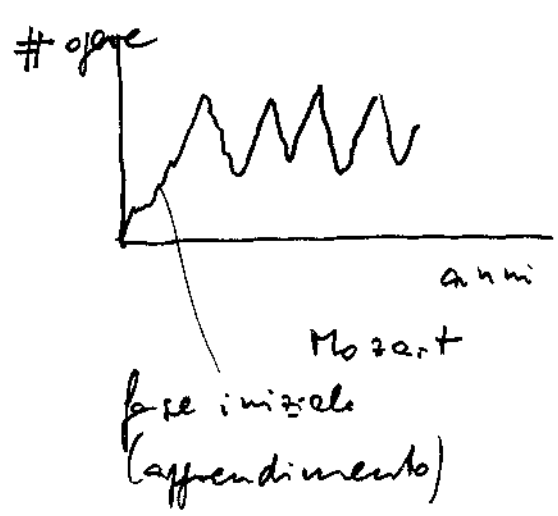
infiniti cicli dello stesso periodo nel caso lineare

# Esempi

- rotazione agricola (massimizzazione della produzione media)
- produzione di pelli pregiate (famose serie secolari di pelli di lince canadese)

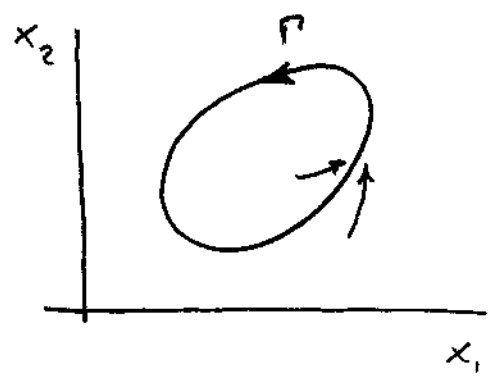


- circuiti elettrici
- bipolarismo e alternanza
- produzione nelle professioni creative

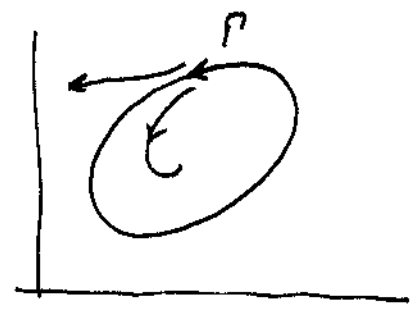


- strutture elastiche in un fluido a velocità costante

# Stabilità dei cicli



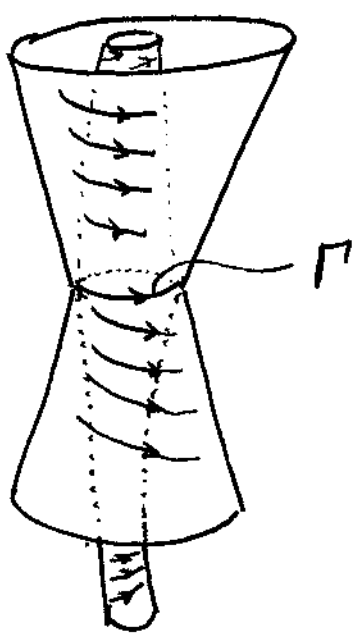
ciclo stabile (in piccolo)



ciclo instabile (repulsore)

Definizione Un ciclo  $\Gamma$  si dice asintoticamente stabile quando tutte le traiettorie perturbate trasversalmente tendono verso  $\Gamma$  per  $t \rightarrow \infty$ , almeno per perturbazioni piccole.

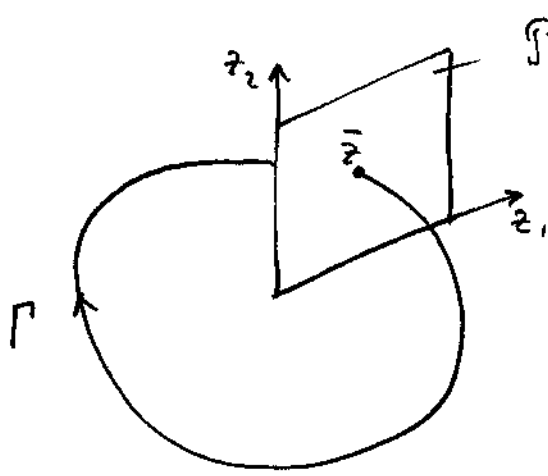
Esistono anche cicli sella



Su uno dei due bussolotti si tende verso  $\Gamma$ , mentre sull'altro ci si allontana da  $\Gamma$

I bussolotti sono, rispettivamente, le varietà-stabile e quelle instabile di  $\Gamma$

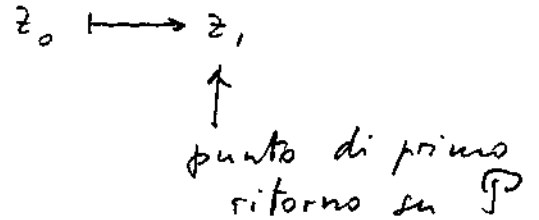
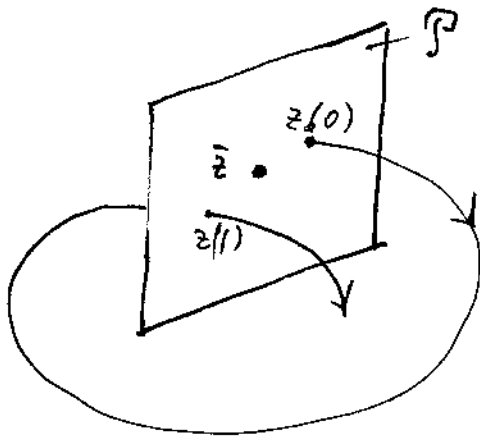
# Sezione di Poincaré e mappa di Poincaré



$\mathcal{P}$  (sezione di Poincaré)

La sezione di Poincaré è "trasversale" e può essere coordinata

ciclo  $\Gamma \Leftrightarrow$  punto  $\bar{z}$



$z(1) = P z(0)$  mappa di  $P$ .

Più in generale

$z(t+1) = P(z(t))$  mappa di Poincaré

Se  $z(t) \rightarrow \bar{z} \quad \forall z(0)$  vicini a  $\bar{z}$  il ciclo  $\Gamma$  è asintoticamente stabile

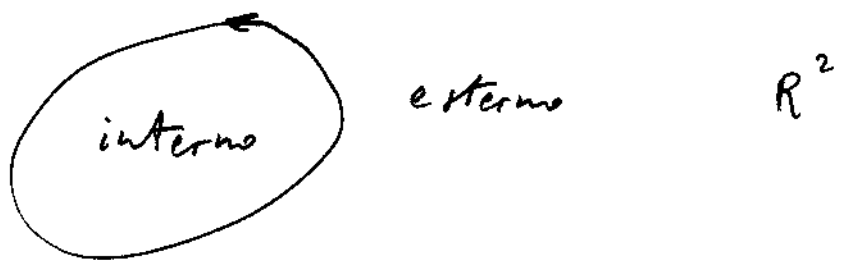
Conclusione La stabilità di un ciclo in  $\mathbb{R}^n$  si può studiare studiando la stabilità di un equilibrio in  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

In particolare si può usare la linearizzazione di  $P$ : modulo degli autovalori di  $\frac{\partial P}{\partial z} < 1 \Rightarrow$  asintotica stabilità di  $\Gamma$

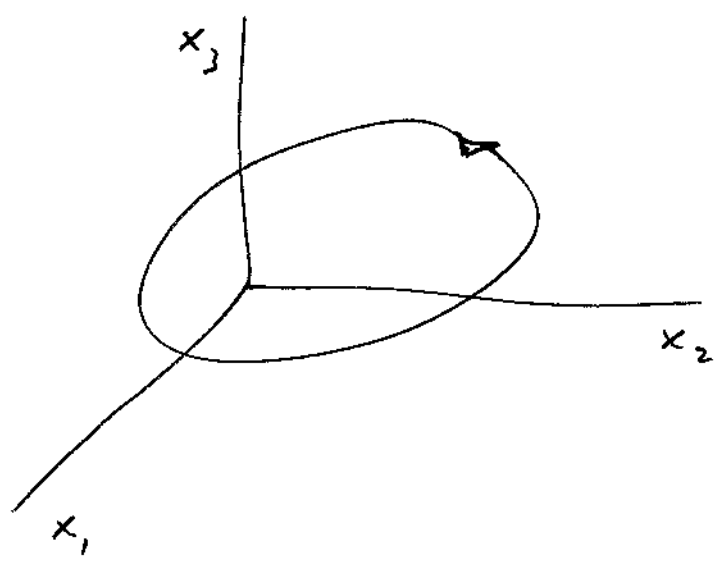
# Sistemi a tempo continuo del II ordine

In questi sistemi valgono proprietà particolari sull'esistenza e non esistenza dei cicli.

Il motivo è semplice: un ciclo in  $R^2$  divide lo spazio in due insiemi, uno interno al ciclo e uno esterno



Cio' non è vero in  $R^n$  con  $n \geq 3$

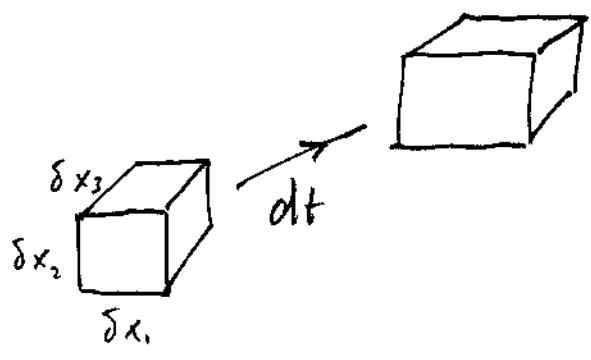


in  $R^3$  una linea chiusa non divide lo spazio in parte interne e parte esterne al ciclo

# Interpretazione geometrica della divergenza di $f$

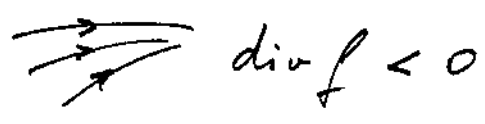
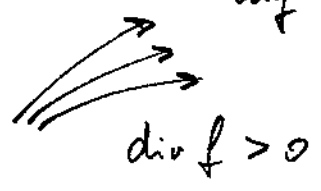
$$\text{div } f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$\text{div } f \begin{cases} > 0 & \text{le traiettorie divergono in } x \\ < 0 & \text{le traiettorie convergono in } x \end{cases}$



$$\begin{aligned} \frac{d(\delta V)}{dt} &= \frac{d}{dt} (\delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3) = \delta \left( \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3 + \delta \left( \frac{dx_2}{dt} \right) \delta x_1 \delta x_3 + \\ &+ \delta \left( \frac{dx_3}{dt} \right) \delta x_1 \cdot \delta x_2 = \delta f_1 \delta x_2 \delta x_3 + \delta f_2 \delta x_1 \delta x_3 + \delta f_3 \delta x_1 \delta x_2 \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \underbrace{\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3}_{\delta V} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \underbrace{\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3}_{\delta V} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \underbrace{\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3}_{\delta V} \\ &= \text{div } f \cdot \delta V \end{aligned}$$

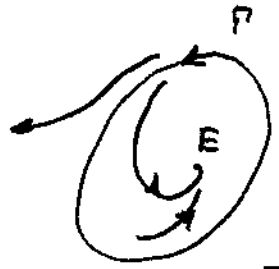
quindi  $\text{div } f > 0 \Rightarrow \frac{d(\delta V)}{dt} > 0 \Rightarrow$  i volumi aumentano  $\Rightarrow$  le traiettorie divergono  
 $\text{div } f < 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow$  le traiettorie convergono



# Divergenza e cicli

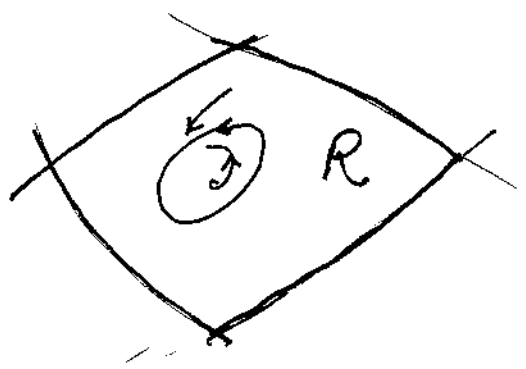


vicino a  $\Gamma$   $\text{div} f < 0$   
 vicino a  $E$   $\text{div} f > 0$



vicino a  $\Gamma$   $\text{div} f > 0$   
 vicino a  $E$   $\text{div} f < 0$

conclusione : se esiste un ciclo in una regione  $R$  in tale regione la divergenza cambia segno



$$\exists \Gamma \subset R$$

$$\downarrow$$

$$\text{div} f \geq 0 \text{ in } R$$

Pertanto si può concludere con il seguente criterio di non esistenza (di Bendixon)

## Criterio di non esistenza (Bendixon)

Se in una regione chiusa e limitata dello spazio di stato ( $\mathbb{R}^2$ ) la divergenza di  $f$  non cambia segno (o al più si annulla su delle linee) allora non esistono cicli in tale regione.



Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\text{div } f = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

se  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  non cambia segno in una regione  $\gamma$ , in tale

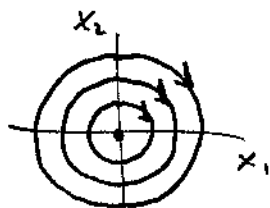
regione non esistono cicli.

Esempio

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

sistema lineare con  $\infty$  cicli non isolati



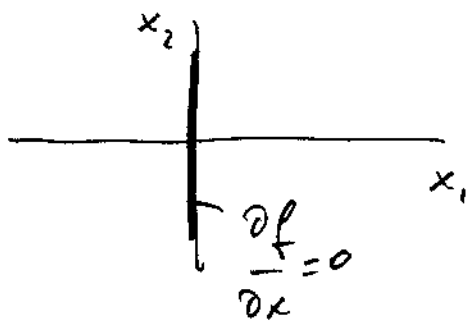
$\text{div } f = 0 \Rightarrow$  il criterio non permette di concludere alcunché perché  $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  non cambia segno ma si annulla ovunque

Esempio

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_1^2)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 + 1 - x_1^2 = -x_1^2$$



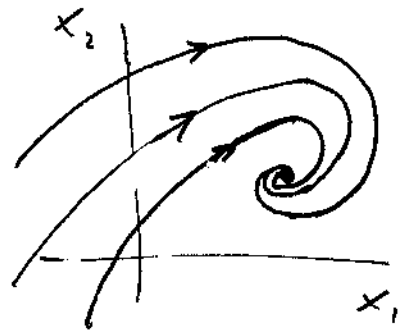
non esistono cicli perché

$$\frac{\partial f}{\partial x} \leq 0 \text{ ovunque e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ su una linea (asse } x_2)$$

# Equivalenza orbitale

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \Rightarrow$$



$$\begin{matrix} \dot{x}_2 = f_2 \\ \dot{x}_1 = f_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Q(x_1, x_2) \overbrace{f_1(x_1, x_2)}^{f_1^*(x_1, x_2)} \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2) \overbrace{f_2(x_1, x_2)}^{f_2^*(x_1, x_2)} \end{cases} \Rightarrow$$

idem in  $\mathcal{R}$

$$\begin{matrix} \dot{x}_2 = Q f_2 \\ \dot{x}_1 = Q f_1 \end{matrix}$$

con  $Q(x_1, x_2) > 0$  in una regione  $\mathcal{R}$

In questi casi si parla di equivalenza orbitale perché le traiettorie (dette anche orbite) dei due sistemi sono le stesse in  $\mathcal{R}$

Le due traiettorie sono però percorse con velocità diverse (cambia la legge oraria)

Conservandosi le traiettorie si conservano anche i cicli e la loro stabilità.

## Criterio di non esistenza di cicli (di Dulac)

Un sistema  $\dot{x} = f(x)$  non ammette cicli in  $\mathbb{R}^2$

se

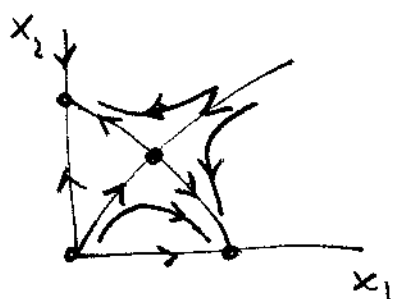
$\exists Q(x_1, x_2) > 0$  in  $\mathbb{R}^2$  tale che

$$\operatorname{div} f^* = \frac{\partial Q}{\partial x_1} f_1 + Q \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} f_2 + Q \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

non cambia segno in  $\mathbb{R}^2$  e al più si annulla su delle linee

Esempio (modello di competizione tra bettoni)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - \alpha_1 x_1 x_2 = x_1 \left[ r_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - \alpha_1 x_2 \right] \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - \alpha_2 x_1 x_2 = x_2 \left[ r_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - \alpha_2 x_1 \right] \end{aligned}$$



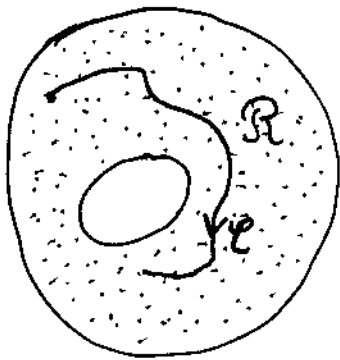
quadro di stato (già visto)

L'applicazione del criterio di Bendixon non permette di dimostrare che non esistono cicli in  $\mathbb{R}_+^2$ .

Dividendo invece le due equazioni per  $x_1 x_2$ , cioè moltiplicandole per  $\frac{1}{x_1 x_2}$  che è positivo in  $\mathbb{R}_+^2$  si ottiene un sistema  $\dot{x} = f^*(x)$  con divergenza di  $f^*$  negativa in  $\mathbb{R}_+^2$

# Criterio di esistenza di cicli di Poincaré (Bendixon)

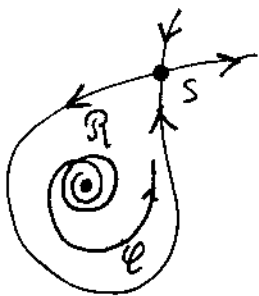
Se un sistema del II ordine  $\dot{x} = f(x)$  ha una traiettoria  $\mathcal{C}$  interamente confinata in un insieme  $R$  chiuso e limitato in cui non ci sono stati di equilibrio, allora tale traiettoria  $\mathcal{C}$  è un ciclo o tende a un ciclo.



Osservazioni (\*) tipicamente ci sono equilibri all'interno della zona delimitata dalla frontiera interna di  $R$  in generale

(\*) le frontiere di  $R$  non sono,  $\gamma$ , traiettorie ma in casi speciali potrebbero esserlo.

Perché il criterio non può essere esteso al caso in cui ci siano equilibri sulla frontiera di  $R$

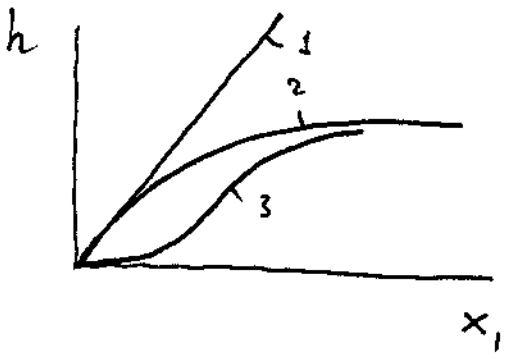


$S$  è una sella con traiettorie omocline. Consideriamo come regione  $R$  quella delimitata dalla piccola circonferenza intorno al fuoco instabile e dell'omocline.

La traiettoria  $\mathcal{C}$  è interamente confinata in  $R$  ma non tende verso un ciclo (ma verso l'omocline)

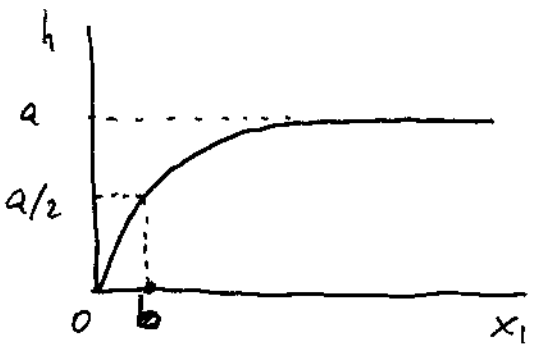
Esempio : ciclo risorse - consumatori (modello di McArthur)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{a x_1}{b+x_1} x_2 & \text{risorse (prede)} \\ \dot{x}_2 = \frac{e a x_1}{b+x_1} x_2 - m x_2 & \text{consumatori (predatori)} \end{cases}$$



$h$  = risposta funzionale = quantità di risorse consumate nell'unità di tempo da un singolo consumatore (predatore)

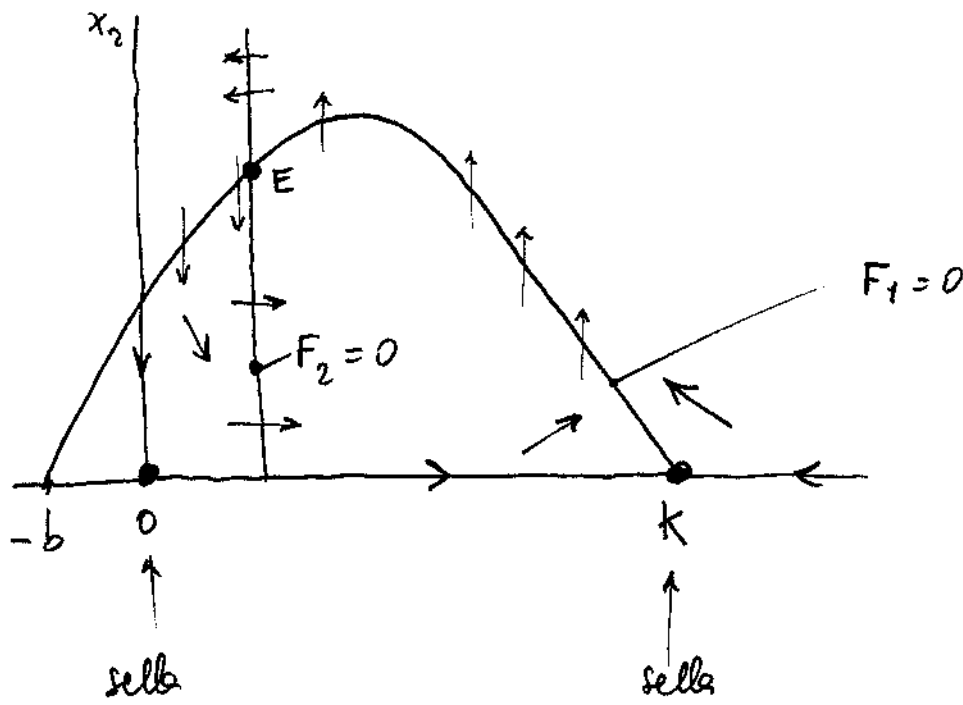
$$h = \begin{cases} a x_1 & \text{(Lotka - Volterra)} \\ \frac{a x_1}{b+x_1} & \text{(Holling tipo II)} \leftarrow \text{questa è l'ipotesi qui usata} \\ \frac{a x_1^2}{b+x_1^2} & \text{(Holling tipo III)} \end{cases}$$



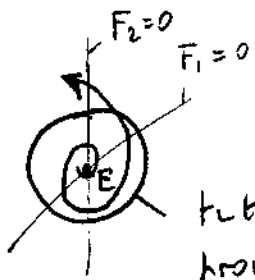
$a$  = massimo tasso di consumo  
 $b$  = costante di dimezzamento = densità della risorsa alla quale il consumatore consuma la metà di quanto è capace di consumare al massimo

$$\dot{x}_1 = x_1 \left[ r \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{a x_2}{b+x_1} \right] = x_1 F_1(x_1, x_2)$$

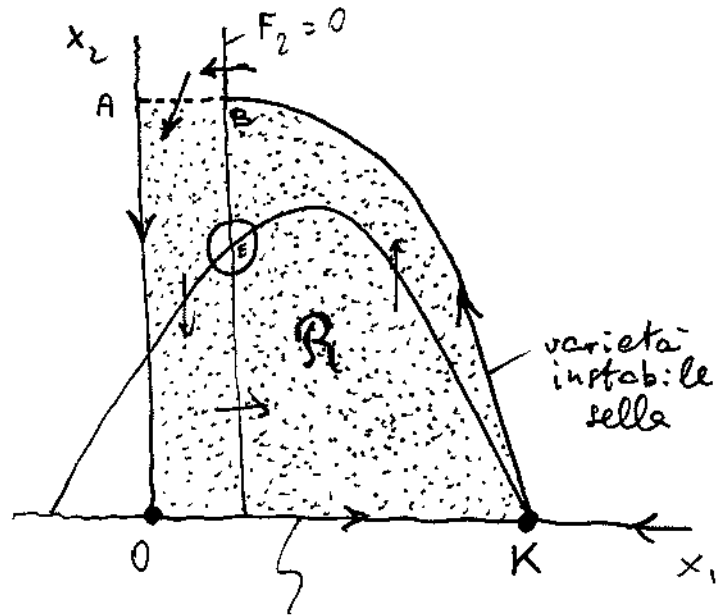
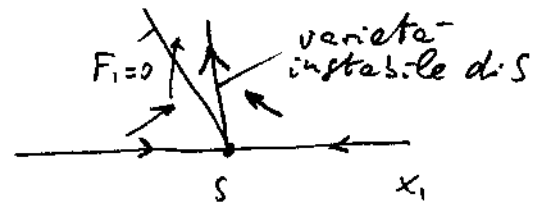
$$\dot{x}_2 = x_2 \left[ \frac{e a x_1}{b+x_1} - m \right] = x_2 F_2(x_1, x_2)$$



$E$  è un equilibrio instabile (tipicamente un fuoco)  
 e' dimostrabile per linearizzazione



tutte le traiettorie provenienti da  $E$  escono dal cerchietto



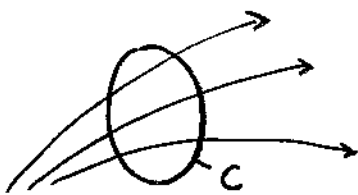
connessione sella-sella

- La regione  $R$  è quella punteggiata
- All'interno di  $R$  non ci sono equilibri
- Sulle frontiere di  $R$  ci sono due selle
- Dal segmento  $AB$  entrano in  $R$  traiettorie interamente confinate in  $R$
- Tali traiettorie non possono tendere verso le selle (facile ma non banale da dimostrare)

conclusione le traiettorie che entrano da  $AB$  tendono verso un ciclo (che è unico e stabile)

Definizione (indice di una linea chiusa)

Indice di una linea chiusa e semplice  $C$  non passante per stati di equilibrio del sistema del II ordine  $\dot{x} = f(x)$  è il numero  $i(C)$  di rotazioni fatte in senso antiorario del vettore  $\dot{x}$  quando il punto  $x$  percorre la linea  $C$  in senso antiorario



$i(C) = 0$



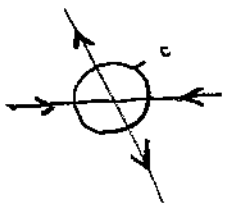
$i(C) = 1$



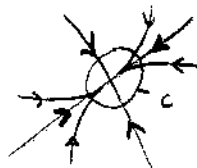
$i(C) = i(\Gamma) = 1$

Definizione (indice di uno stato di equilibrio)

Indice di uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  è l'indice di una linea chiusa che contenga al suo interno  $\bar{x}$



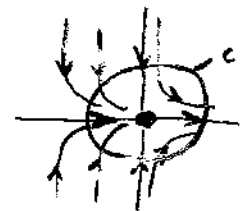
$i(\bar{x}) = -1$   
sella



$i(\bar{x}) = 1$   
nodo



$i(\bar{x}) = 1$   
fuoco

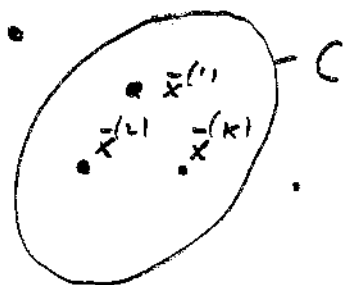


$i(\bar{x}) = 0$   
nodo-sella  
 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$

Costatazione

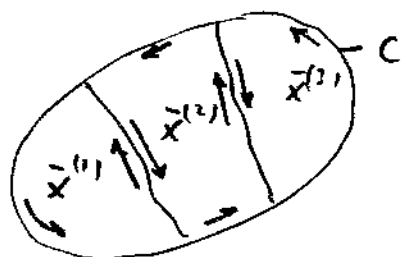
Tutti gli equilibri "iperbolici" ( $\frac{\partial f}{\partial x}$  non "critico") hanno indice unitario tranne la sella che ha indice  $-1$

## Teorema degli indici



Data una linea chiusa e semplice  $C$  non passante per stati di equilibrio, il suo indice  $i$  è pari alla somma degli indici degli stati di equilibrio contenuti nella regione dell'unità di  $C$ .

### Dimostrazione



Le rotazioni sulle linee interne (percorse due volte in senso opposto) si compensano

$$i(C) = \sum_{k=1}^K i(\bar{x}^{(k)})$$

Poiché  $i(\Gamma) = 1$  segue che:

$\uparrow$   
ciclo

### Teorema di Poincaré (generale)

Un ciclo contiene al suo interno  $K \geq 1$  stati di equilibrio  $\bar{x}^{(1)} \dots \bar{x}^{(K)}$  in modo che  $\sum_{k=1}^K i(\bar{x}^{(k)}) = 1$

Se gli stati di equilibrio  $\bar{x}^{(k)}$  sono iperbolici si può affermare quanto segue:

### Teorema di Poincaré (con equilibri iperbolici)

Un ciclo contiene  $2s + 1$  equilibri, di cui  $s$  selle e  $(s + 1)$  non selle.



Esempio (numerico)

Si dice se il sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^2 x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2$$

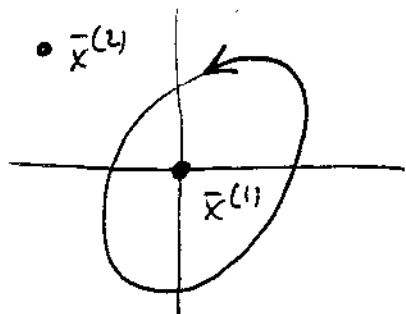
ha un ciclo contenente al suo interno l'origine.

Poiché  $B = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2x_1x_2^2$  cambia segno in

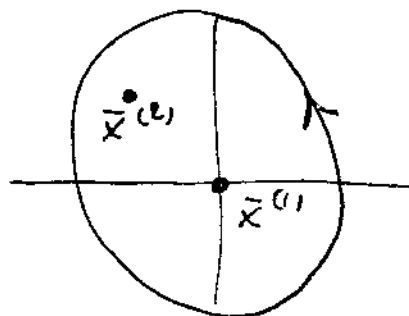
qualsiasi regione candidata a contenere un ciclo contenente al suo interno l'origine, non possiamo escludere tale possibilità.

Equilibri:  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Inoltre  $\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}^{(1)}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  per cui  $\bar{x}^{(1)}$  è una sella



assurdo perché un ciclo non può contenere solo una sella



assurdo perché all'interno di un ciclo devono esistere un numero dispari di equilibri (k selle e (k+1) non selle)

Conclusione  $\nexists$  cicli contenenti al loro interno l'origine dello spazio di stato.

4. Cicli

PROBLEMI

P. 1

Si dica se il sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 - x_1^3 x_2^2 - u^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

ammette cicli per valori costanti dell'ingresso  $u$ .

P 2

Dimostrare che il modello di epidemie descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 x_2 & x_1 &= \text{suscettibili} \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 x_2 - \beta x_2 & x_2 &= \text{infetti} \end{aligned}$$

non ammette cicli.

P. 3

Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 - u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

e si determinino gli stati di equilibrio corrispondenti ad ingresso nullo. Indi si studi la stabilità di tali stati di equilibrio, si dica di che tipo sono (fuochi, selle, nodi o centri) e si determini (anche solo qualitativamente) l'andamento delle traiettorie nell'intorno degli stati di equilibrio. Infine si dica perché per  $u = 0$  non possono esistere cicli limite e si tracci un possibile quadro delle traiettorie (sempre qualitativamente).

P. 4

Si consideri il sistema non lineare autonomo

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1(1 + x_2)$$

e si determinino i suoi stati di equilibrio. Indi si studi la stabilità di questi stati di equilibrio. Infine si dica se può esistere una soluzione periodica con

$$|x_1(t)| < 1 \quad |x_2(t)| < 1$$

P. 5

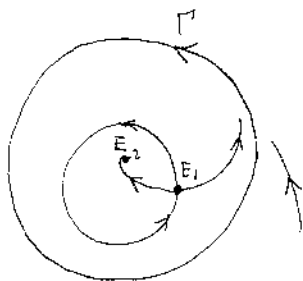
Un navigatore è alla ricerca di un'isola su cui è vissuta per alcuni millenni una popolazione. Il navigatore avvista le due isole mostrate in figura.



Verso quale isola ordina di fare rotta?

P. 6

Un sistema dinamico del secondo ordine a tempo continuo ha il seguente quadro delle traiettorie, caratterizzato da due equilibri ( $E_1$  e  $E_2$ ) e un ciclo ( $\Gamma$ ).



Il ciclo contiene al suo interno due equilibri. Si dica perché ciò non è in contrasto con la teoria degli indici di Poincaré.



**P. 7**

Si dimostri che il sistema senza ingresso

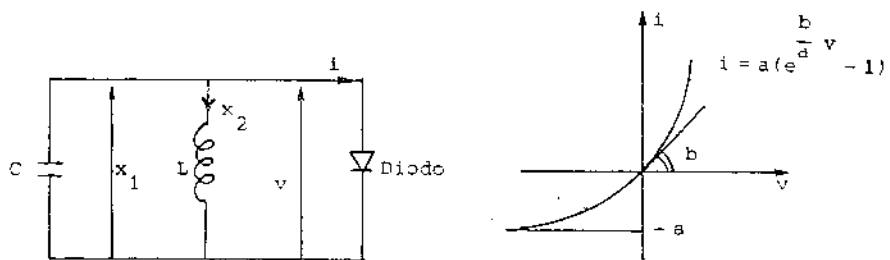
$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^2 x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2$$

non ammette cicli che contengano al proprio interno l'origine dello spazio di stato.

P. 8

Studiare il comportamento del circuito elettrico di figura mostrando, in particolare, che esso non può essere un oscillatore per nessun valore positivo dei parametri  $a$ ,  $b$ ,  $C$  ed  $L$ .



## SOLUZIONI

4. CICLI

S. 1

La divergenza è data da

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 - 3x_1^2 x_2^2 - 1 = -2 - 3x_1^2 x_2^2$$

ed è pertanto sempre negativa. Per il teorema di

Bendixon non possono quindi esistere cicli.

5.2

Per dimostrare che non esistono cicli nel sistema (ovviamente nel quadrante positivo che è quello di interesse) basta notare che in tale quadrante è sempre

$$\dot{x}_1 < 0$$

il che è conflittuale con l'esistenza di un ciclo.

Un'altra possibile dimostrazione consiste nel notare che all'interno del quadrante positivo non esistono equilibri, il che è conflittuale col teorema degli indici di Poincaré.

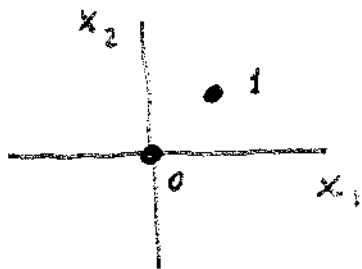
In questo caso non è invece possibile dimostrare che non esistono cicli per mezzo del teorema di Bendixon, perché la divergenza cambia segno nel quadrante positivo.

S. 3

## Equilibri per $u=0$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = -x_1 + x_2^2 \\ 0 = x_1 - x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow -x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

Quindi esistono due equilibri che chiameremo 0 e 1



## Stabilità dei due equilibri

Usiamo il metodo della linearizzazione.

$$J_0 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

↓  
due autovalori coincidenti  
e pari a  $-1$

↓  
stabilità asintotica (nodo stabile)

$$J_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2x_2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Big|_{x_1=x_2=1} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

↓  
 $\det J_1 = 1 - 2 < 0$

↓  
è una sella ( $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ )

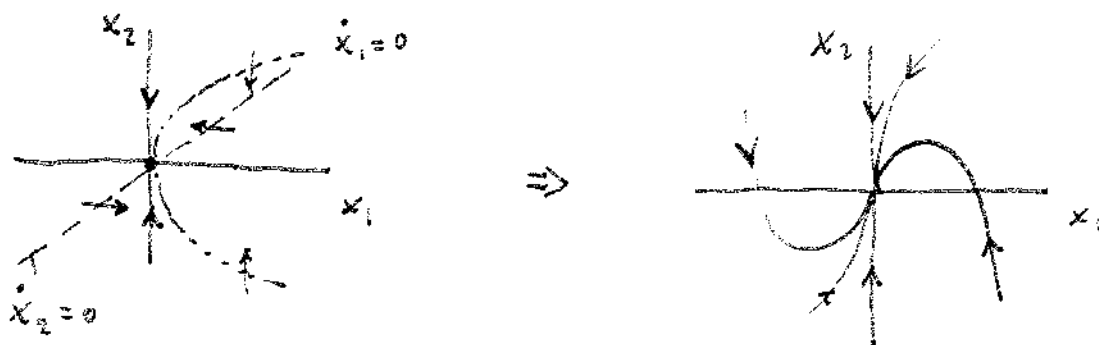
## Andamento delle traiettorie nell'intorno degli equilibri

Per determinare tale andamento è sufficiente calcolare gli autovettori dei due sistemi linearizzati, perché nell'intorno degli equilibri (che sono iperbolici) l'andamento delle traiettorie è quello del sistema linearizzato.

## Autovettori di $J_0$

$$\left. \begin{array}{l} J_0 x = \lambda_i x \\ \lambda_i = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -x_1 \\ \hline -x_2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow x_1 = 0$$

un solo autovettore

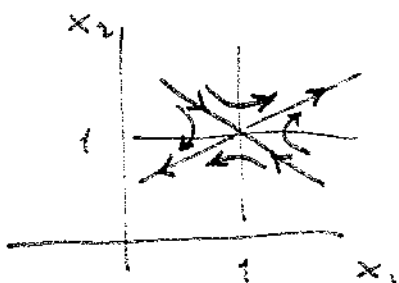


## Autovettori di $J_1$

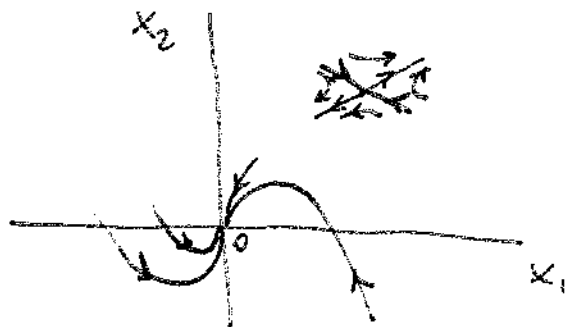
$$J_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 2 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = -2 \Rightarrow \lambda_1 = -2 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 = -1 \Rightarrow \lambda_2^2 + 2\lambda_2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \end{array}$$

$$J_1 x = \lambda_i x \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 2 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array} = \lambda_i \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow x_1 - x_2 = (-1 \pm \sqrt{2}) x_2$$

$$\Downarrow \\
 x_1 = \pm \sqrt{2} x_2$$



In conclusione il quadro delle traiettorie vicino agli equilibri è il seguente



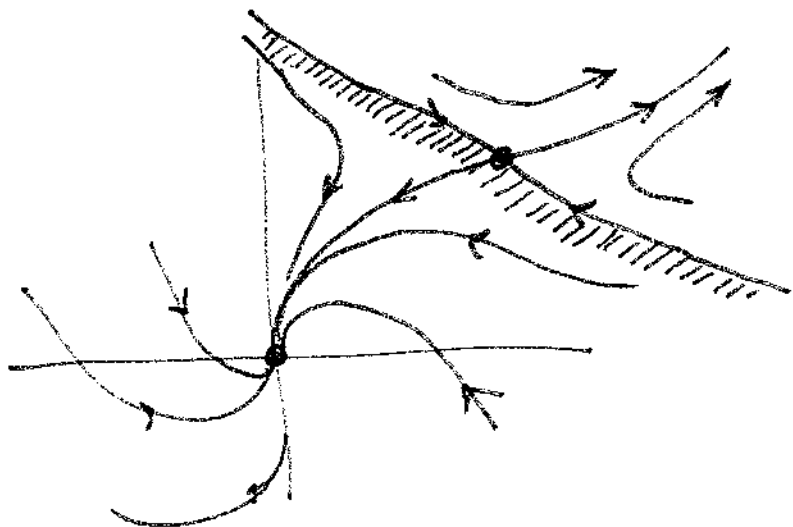
## Quadro delle traiettorie

Per poter completare ragionevolmente il quadro delle traiettorie è bene sapere se nel sistema possono o no esistere cicli. Cicli intorno alla sella o intorno a entrambi gli equilibri si possono escludere per la teoria degli indici di Poincaré. Sempre per lo stesso motivo si possono escludere cicli che non contengano al loro interno alcun equilibrio. Infine, i cicli che contengono al loro interno solo l'equilibrio o possono essere pure esclusi perché la divergenza

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 - 1 = -2$$

non cambia mai segno (teorema di Bendixon).

Allora si può immaginare, estendendo l'ultima figura, che il quadro di stato sia di questo tipo



il bacino di attrazione dell'origine è delimitato dalla varietà stabile della sella.



S.4

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1(1+x_2) \end{cases}$$

Equilibri

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1(1-2x_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$



esistono 2 equilibri che  
indichiamo con 0 e 1

Stabilità degli equilibri

Procediamo via linearizzazione

$$J_0 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \det J_0 = -1 \Rightarrow \text{sella (perché } \lambda_1, \lambda_2 < 0)$$

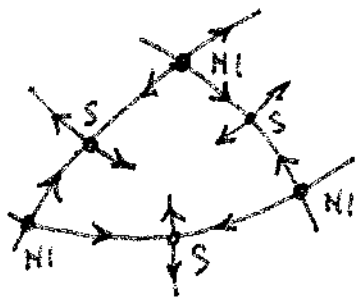
$$J_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{nodo stabile}$$

Soluzione periodica

Se esistesse una soluzione periodica con  $|x_i| < 1$ ,  $i=1,2$  esisterebbe un ciclo con al proprio interno un solo stato di equilibrio: una sella. Ciò è assurdo per il criterio degli indici di Poincaré.

S. 5

Si deve fare rotta verso l'isola di destra perché lì può esistere acqua (lago/laghi) mentre nella prima isola ciò non è possibile. Per dimostrare formalmente questa affermazione basta tracciare nel piano le traiettorie seguite dall'acqua di scorrimento superficiale. Nel caso di sinistra esiste solo un punto di equilibrio (repulsore) corrispondente alla cima del monte, mentre nel caso di destra esistono molti equilibri di cui alcuni sono selle. La geometria di questo secondo caso è la seguente



HI = nodo instabile  
(cima dei monti)

S = selle

Deve quindi esistere un lago (almeno un lago) nella regione indicata in figura dalle quale le traiettorie non possono uscire.

S. 6

Il criterio degli indici di Poincaré dice che all'interno di un ciclo devono esistere un numero dispari  $\sqrt{2K+1}$  di equilibri di cui  $K$  sono selle e  $K+1$  non selle. Non è, quindi, previsto che all'interno di un ciclo ci siano due (numero pari) di equilibri. Il motivo per cui il quadro mostrato non è impossibile è che il criterio degli indici enunciato come qui fatto è valido nell'ipotesi che gli equilibri siano iperbolici, mentre nel quadro mostrato l'equilibrio  $E_1$  non è iperbolico. In effetti, l'equilibrio  $E_1$  è la sovrapposizione di una sella e un nodo



per cui è come se all'interno del ciclo ci fossero 3 equilibri di cui uno è una sella.

## S. 7

Il criterio di Bendixon non fornisce in questo caso alcuna informazione, perché la funzione

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2x_1x_2^2$$

ha il segno di  $(-x_1)$  e quindi cambia segno in qualsiasi regione che sia candidata a contenere un ciclo contenente al suo interno l'origine dello spazio di stato. Determiniamo allora gli stati di equilibrio del sistema ponendo  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ . Dalla seconda equazione di stato si ottiene  $-x_1 = x_2$ , che introdotta nella prima equazione fornisce

$$x_2 - x_2^4 = 0$$

le cui soluzioni sono  $x_2 = 0$  e  $x_2 = 1$  (le soluzioni complesse ovviamente non interessano).

Pertanto, gli stati di equilibrio sono

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Poiché l'origine del piano di stato è uno stato di equilibrio, possiamo linearizzare il sistema intorno a tale stato e la matrice  $A$  del sistema linearizzato è data da

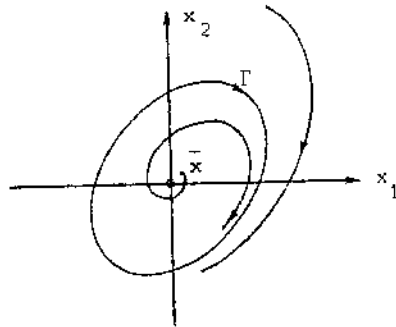
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(si noti che tale matrice si ottiene direttamente dalle equazioni di stato trascurando i termini non lineari in  $x_1$  e  $x_2$ ). Poiché  $A$  è in forma triangolare ne segue che i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale  $(-1$  e  $+1)$ . In altre parole, l'origine è un punto di "sella".

Ricordando che un ciclo deve contenere al suo interno un numero dispari  $(2k+1)$  di stati di equilibrio e che  $k$  di tali stati devono essere selle, possiamo concludere che non possono esistere cicli contenenti al loro interno l'origine, perché l'origine è una sella.

S. 8

Le variabili di stato del circuito sono la tensione  $x_1 (=v)$  sul condensatore e la corrente  $x_2$  nell'induttore. Per essere un oscillatore il circuito dovrebbe ammettere un ciclo limite (stabile)  $\Gamma$  all'interno del quale dovrebbe esistere uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  instabile (vedi figura)



Poiché le equazioni di stato della rete sono

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} \left( -x_2 - a \left( e^{\frac{b}{a} x_1} - 1 \right) \right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} x_1$$

si può dedurre immediatamente che non possono esistere cicli limite. Infatti, la funzione

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{b}{c} e^{\frac{b}{a} x_1}$$

è sempre dello stesso segno (negativa) in qualsiasi sottoregione del piano di stato, per cui per il teorema di Bendixon non esistono cicli limite.

D'altra parte, pur essendoci un unico stato di equilibrio (l'origine dello spazio di stato), tale stato di equilibrio è asintoticamente stabile come risulta dalla analisi del sistema linearizzato

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} -\frac{b}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori con parte reale negativa

$$\lambda = \frac{-\frac{b}{C} \pm \sqrt{\frac{b^2}{C^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

Più precisamente questo stato di equilibrio è un fuoco stabile se  $\frac{b^2}{C} < \frac{4}{L}$  e un nodo stabile in caso contrario. Inoltre tale stato di equilibrio è “globalmente” stabile. Infatti, considerata la funzione energia

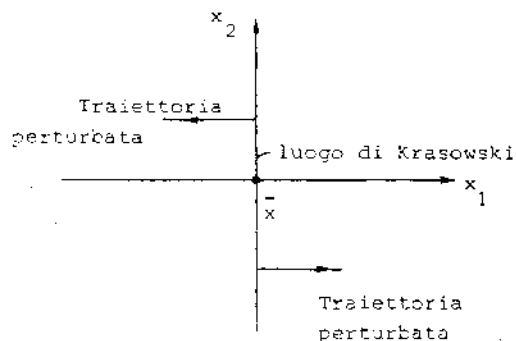
$$V = \frac{1}{2} C x_1^2 + \frac{1}{2} L x_2^2$$

che è definita positiva e ha linee di livello chiuse (ellissi), si ha

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = C x_1 \frac{1}{C} \left( -x_2 - a \left( e^{\frac{b}{a} x_1} - 1 \right) \right) + L x_2 \frac{1}{2} x_1 = -a x_1 \left( e^{\frac{b}{a} x_1} - 1 \right).$$

Tale funzione  $\dot{V}$  è semidefinita negativa e si annulla solo per  $x_1 = 0$ . D'altra parte per  $x_1 = 0$  si ha

$\dot{x}_1 = (1/C)x_2$  e  $\dot{x}_2 = 0$  per cui il luogo di Krasovski (luogo dei punti con  $\dot{V} = 0$ ) non contiene traiettorie perturbate (vedi figura).



Il luogo di Krasovski (asse  $x_2$ )  
non contiene traiettorie perturbate

Per il criterio di La Salle si può pertanto concludere che lo stato di equilibrio  $\bar{x}$  è globalmente stabile (anche questa considerazione permette di dimostrare che non esistono cicli). In ultima analisi

il comportamento in grande del circuito è qualitativamente simile al suo comportamento in piccolo come mostrato in figura nel caso  $b < 2\sqrt{\frac{C}{L}}$  in cui lo stato di equilibrio è un fuoco stabile.

