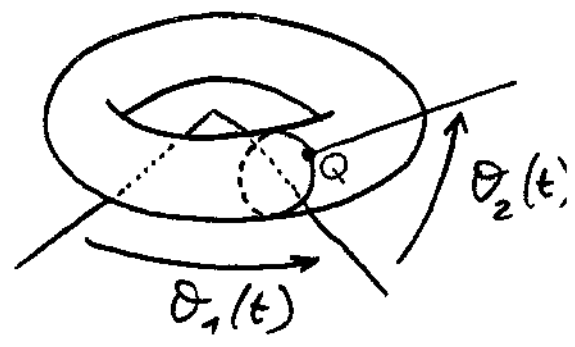
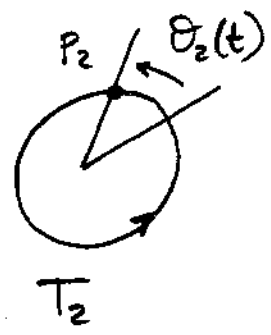
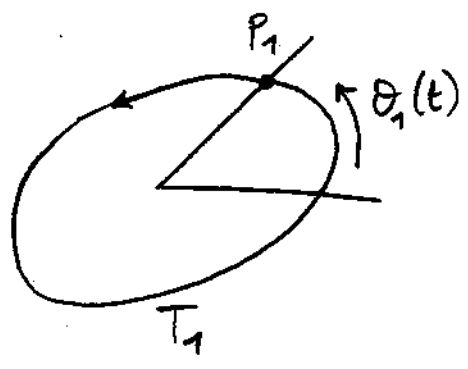


5. TORI [2h]

- Definizione. Esempi. Rappresentazione. Criterio di Bendixon.
- Aggancio in frequenza. Esempio.
- Problemi
- Soluzioni

VISUALIZZAZIONE SU TORO

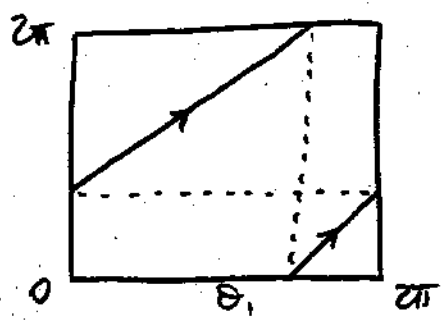
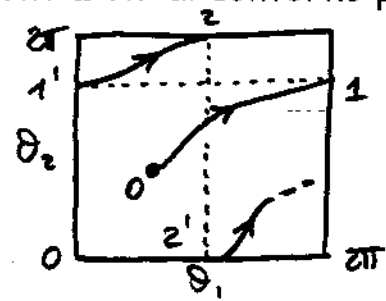
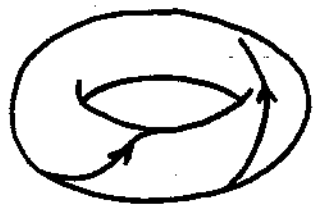


$\frac{T_1}{T_2} = \text{razionale} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n} \rightarrow$ la traiettoria percorsa da Q si chiude su se stessa dopo $nT_1 = mT_2$ unità di tempo
 \Rightarrow l'attrattore è un ciclo (sul toro)

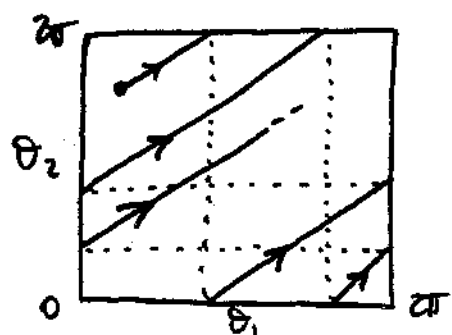
$\frac{T_1}{T_2} = \text{irrazionale} \Rightarrow$ la traiettoria percorsa da Q non si chiude mai su se stessa coprendo densamente la superficie del toro
 \Downarrow
 comportamento quasi-periodico

N. B. Due traiettorie che partono da punti vicini su toro rimangono vicine indefinitamente, cioè non convergono né divergono l'una dall'altra.

Rappresentazione equivalente: quadrato con condizioni al contorno periodiche



ciclo su toro



quasi-periodico

QUASI-PERIODICITÀ

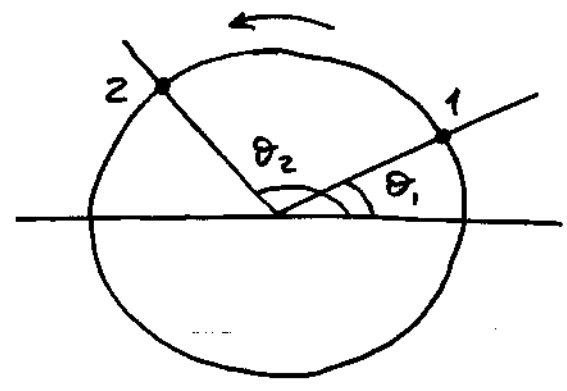
$$y(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$$

- $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \begin{cases} \text{razionale} & \rightarrow (\text{probabilità} = 0) \\ \text{irrazionale} & \rightarrow (\text{probabilità} = 1) \end{cases}$

- $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow pT_1 = qT_2 \Rightarrow y(\cdot) \text{ è periodica di periodo } T$
 \downarrow
 $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$
 $T = pT_1 = qT_2$

- $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{irrazionale} \Rightarrow \underline{y(\cdot) \text{ è quasi-periodica}}$

Esempio: due corridori



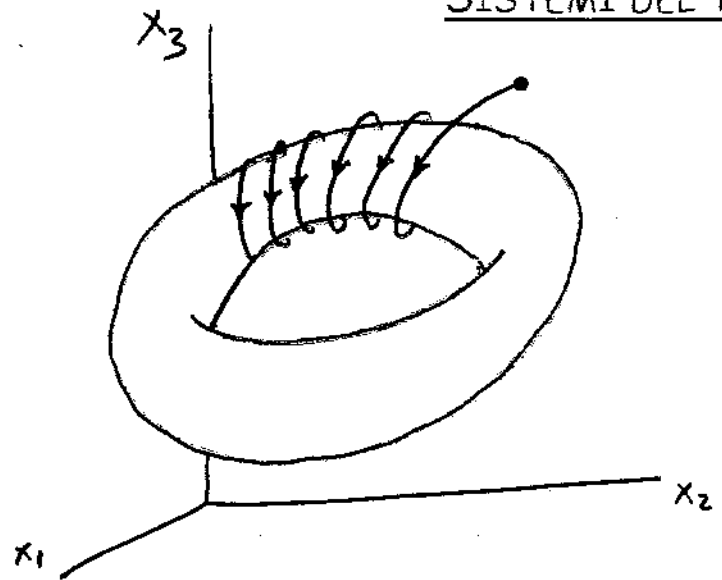
$$\dot{\vartheta}_1 = \omega_1$$

$$\dot{\vartheta}_2 = \omega_2$$

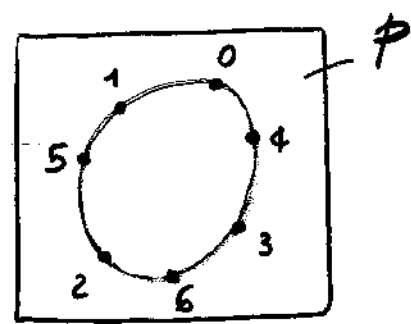
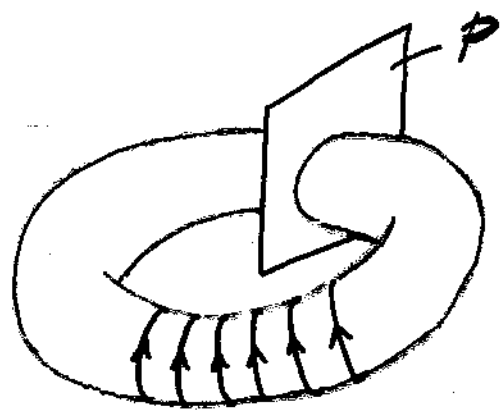
$k \frac{2\pi}{\omega_i} = \text{tempo impiegato dal corridore } i \text{ per percorrere } k \text{ giri}$

- $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{razionale} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} \rightarrow p \frac{2\pi}{\omega_1} = q \frac{2\pi}{\omega_2}$
- \Rightarrow il corridore 1 completerà p giri quando il corridore 2 ne completerà q
- \Rightarrow dopo un tempo $T = p \frac{2\pi}{\omega_1} (= q \frac{2\pi}{\omega_2})$ i due corridori saranno nelle stesse condizioni

SISTEMI DEL TERZO ORDINE

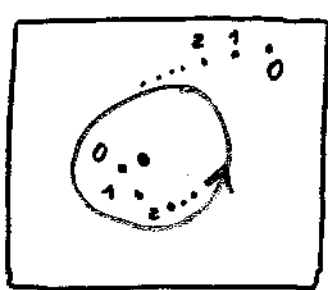


toro attrattore → tutte le traiettorie che partono da punti vicini al toro (anche interni ad esso) tendono verso il toro.

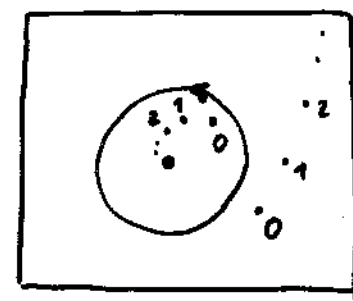


Sezione di Poincaré

dentro il toro c'è un ciclo limite



toro stabile



toro instabile

N. B. Sistemi di ordine più elevato ammettono anche tori-sella

NON ESISTENZA DI TORI

Teorema: (condizione di non esistenza)

Se la divergenza $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ non cambia segno in un insieme chiuso e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (o, al più si annulla su una superficie di dimensione $n-1$), non ci sono tori in Ω .

Dimostrazione (cenno): vedi teorema di Bendixon per i cicli

Esempio: sistema di Lorenz

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

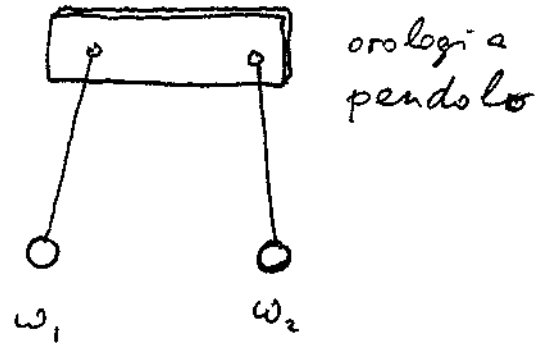
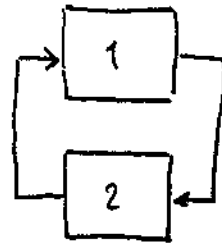
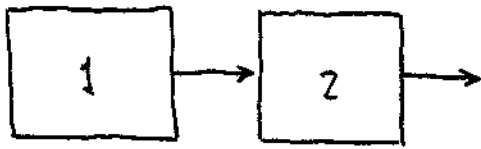
$$\text{divergenza} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -\sigma - 1 - b < 0$$

⇒ il volume si contrae

→ le traiettorie convergono

→ toro attrattore o repulsore non può esistere

(dovrebbe contenere un ciclo repulsore o attrattore)



$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

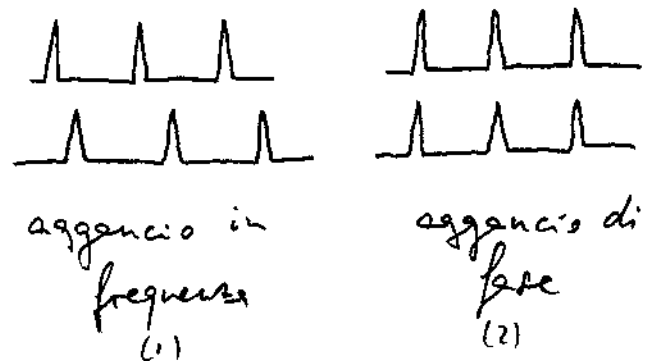
$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

se la frequenza dei lampi è simile alla frequenza di inversione naturale del batterio, il batterio cambia comportamento e inverte il proprio moto ad ogni lampo

se i due orologi sono sufficientemente vicini si sincronizzano (esperimenti di Huygens con famosa lettera al padre 1665)

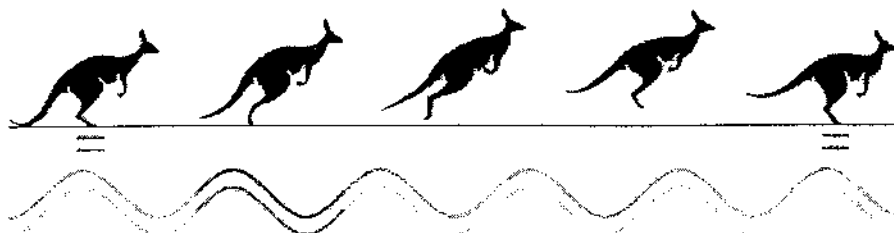
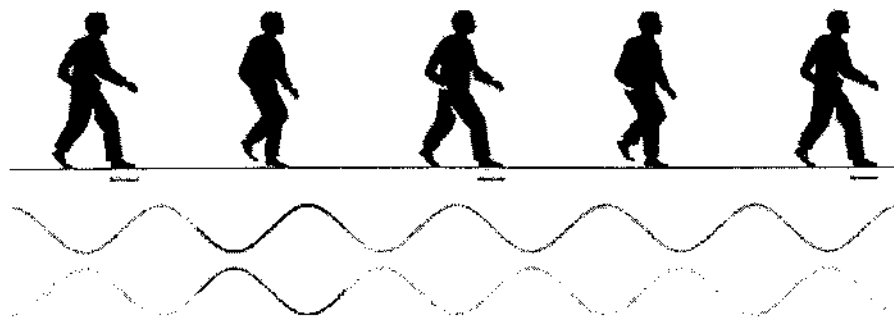
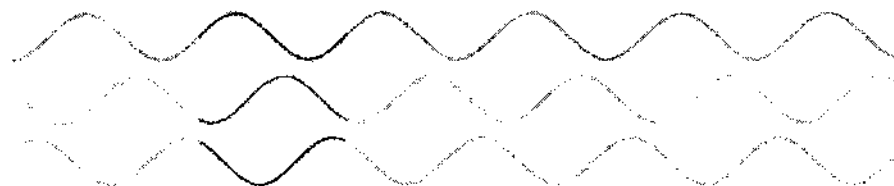
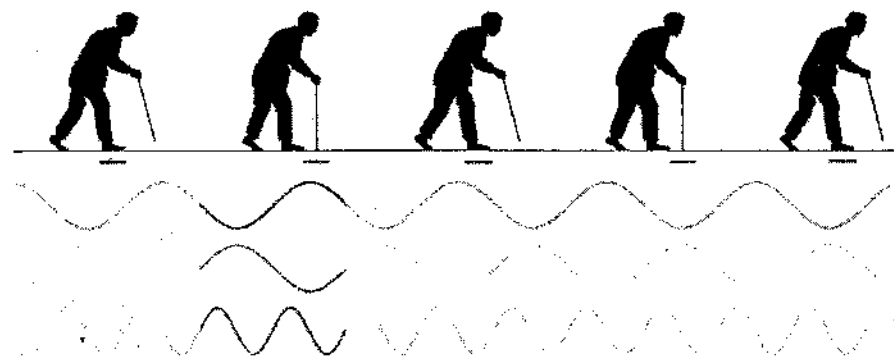
Altri esempi di sincronizzazione

- applanzi (frequenza e fase)
- pacemaker
- lucciole e grilli (Science 1917)
- camminata
- respirazione e battito delle ali dell'anatra
- celle dell'organo
- camminata della coppia



(2) ⇒ (1)

libro di S. Strogatz: SYNC [Hyperion 2003]

a TWO IN SYNCHRONY**b** TWO OUT OF SYNCHRONY**c** THREE IN SYNCHRONY**d** THREE ONE THIRD OUT OF PHASE**e** TWO IN SYNCHRONY AND ONE WILD**f** TWO OUT OF SYNCHRONY AND ONE TWICE AS FAST

surprise at first, even to Stewart and Golubitsky, but in fact the pattern occurs in real life. A person using a walking stick moves in just this manner: right leg, stick, left leg, stick, repeat. The third oscillator is, in a sense, driven by the combined effects of the other two: every time one of them hits a peak, it gives the third a push. Because the first two oscillators are precisely antisynchronous, the third oscillator peaks twice while the others each peak once.

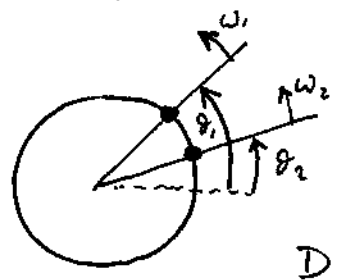
The theory of symmetrical Hopf bifurcation makes it possible to classify the patterns of phase locking for many different networks of coupled oscillators. Indeed, Stewart, in collaboration with James J. Collins, a biomedical engineer at Boston University, has been investigating the striking analogies between these patterns of phase locking and the symmetries of animal gaits, such as the trot, pace and gallop.

Quadruped gaits closely resemble the natural patterns of four-oscillator systems. When a rabbit bounds, for example, it moves its front legs together, then its back legs. There is a phase difference of zero between the two front legs and of one half between the front and back legs. The pace of a giraffe is similar, but the front and rear legs on each side are the ones that move together. When a horse trots, the locking occurs in diagonal fashion. An ambling elephant lifts each foot in turn, with phase differences of one quarter at each stage. And young gazelles complete the symmetry group with the pronk, a four-legged leap in which all legs move in synchrony [see "Mathematical Recreations," by Ian Stewart; *SCIENTIFIC AMERICAN*, April 1991].

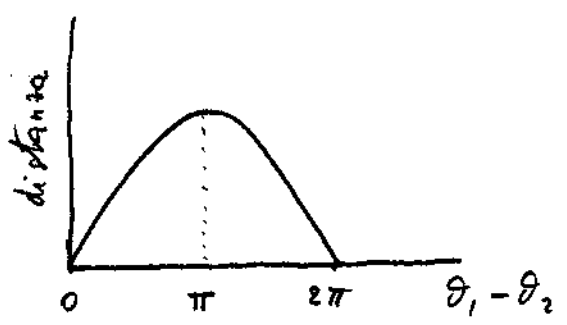
More recently, Stewart and Collins have extended their analysis to the hexapod motion of insects. The tripod

SYMMETRY BREAKING governs the ways that coupled oscillators can behave. Synchrony is the most symmetrical single state, but as the strength of the coupling between oscillators changes, other states may appear. Two oscillators can couple in either synchronous or antisynchronous fashion (*a*, *b*), corresponding roughly to the bipedal locomotion of a kangaroo or a person. Three oscillators can couple in four ways: synchrony (*c*), each one third of a cycle out of phase with the others (*d*), two synchronous and one with an unrelated phase (*e*) or in the peculiar rhythm of two oscillators antisynchronous and the third running twice as fast (*f*). This pattern is also the gait of a person walking slowly with the aid of a stick.

Esempio : due corridori amici (aggancio in frequenza)



$$D = 2 \operatorname{sen} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$



$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 - K_1 \operatorname{sen} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 + K_2 \operatorname{sen} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \end{aligned}$$

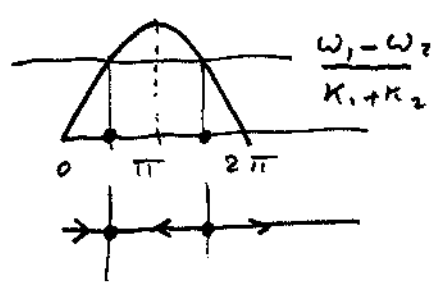
↑
corridori non amici

↑
corridori amici

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 \quad \dot{\varphi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2 - (K_1 + K_2) \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$$

Equilibri : $\dot{\varphi} = 0$

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_1 + K_2}$$



due soluzioni simmetriche di cui una stabile

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 - K_1 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \omega_1 - \frac{K_1}{K_1 + K_2} (\omega_1 - \omega_2) = \lambda \omega_1 + (1 - \lambda) \omega_2$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 + K_2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \omega_2 + \frac{K_2}{K_1 + K_2} (\omega_1 - \omega_2) = \lambda \omega_1 + (1 - \lambda) \omega_2$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 \iff \text{aggancio in frequenza}$$

In conclusione : il corridore più veloce rallenta, mentre quello meno veloce accelera, finché entrambi hanno la stessa velocità e li mantengono con a una distanza fissa.

5. TORI

PROBLEM

P. 1

Nei vecchi film western le diligence in corsa avevano, a volte, le ruote che giravano lentamente all'indietro. Perché?

P. 2

Si considerino le equazioni

$$m\ddot{\rho} = \frac{h^2}{m\rho^3} - k$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{h}{m\rho^2}$$

dove h è una costante positiva. Queste equazioni descrivono (in coordinate polari) il moto di una massa m soggetta a una forza radiale di intensità costante $k > 0$.

- (i) Mostrare che il sistema ammette una soluzione

$$\rho = R \quad \dot{\vartheta} = \omega$$

corrispondente a moto circolare uniforme.

- (ii) Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni radiali intorno all'orbita circolare.
(iii) Dire perchè il moto globale del sistema è quasi-periodico.

P. 3

Ermentrout e Kopell hanno proposto nel 1990 il seguente modello di oscillatori neurali:

$$\dot{\vartheta}_1 = \omega_1 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2$$

$$\dot{\vartheta}_2 = \omega_2 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1$$

Si mostra che per opportuni valori di ω_1 e ω_2 si ha aggancio in frequenza.

SOLUZIONI

5. TORI

S. 1

Filmando una immagine in movimento si raccolgono, di fatto, fotografie dell'oggetto in moto ogni T_1 unite di tempo.

Gli n raggi di una ruota di diligenza ruotano a una velocità angolare legata alla velocità v della diligenza, per cui il tempo T_2 necessario a un raggio per ruotare di un angolo pari a $\frac{1}{n}(2\pi)$ dipende da v , cioè $T_2 = T_2(v)$.

Se la velocità v della diligenza è tale che

$$T_2(v) = T_1,$$

nel film i raggi della diligenza appaiono fermi.

Se, invece, $T_2(v)$ è leggermente maggiore [minore] di T_1 , le ruote della diligenza sembrano girare lentamente all'indietro [in avanti].

In ogni caso se v è costante, $T_2(v)/T_1$ è, genericamente, irrazionale per cui il moto delle ruote ricostruito nel film è quasi-periodico.

S. 2

(i) Ponendo $p = R$ e $\dot{\vartheta} = \omega$ nelle equazioni di stato si ottiene

$$m \cdot 0 = \frac{h^2}{m R^3} - k \quad (1)$$

$$\omega = \frac{h}{m R^2} \quad (2)$$

che ammettono la soluzione

$$R = \sqrt[3]{\frac{h^2}{m k}} \quad \omega = \sqrt[3]{\frac{k^2}{h}}$$

(ii) Supponiamo che esistano piccole oscillazioni radiali e poniamo quindi

$$r(t) = R + \delta(t) \quad \text{con } \delta(t) \text{ piccolo}$$

Dalla prima equazione di stato si ottiene allora

$$m \ddot{\delta} = \frac{h^2}{m (R + \delta)^3} - k$$

$$m R^3 \ddot{\delta} = \frac{h^2}{m \left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^3} - k R^3$$

Poiché

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^3} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^3} \Bigg|_{\frac{\delta}{R}=0} + \frac{d}{d\left(\frac{\delta}{R}\right)} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^3} \right) \Bigg|_{\frac{\delta}{R}=0} \cdot \frac{\delta}{R} + \dots$$

\uparrow
 termini trascurabili
 se $\delta \ll R$

Si ottiene

$$m R^3 \ddot{\delta} = \frac{h^2}{m} \left[1 - 3 \frac{\delta}{R} \right] - k R^3$$

∴

cioè (ricordando la (2))

$$m R^3 \ddot{\delta} + 3 \frac{h^2}{m R} \delta = 0$$

$$m^2 R^4 \ddot{\delta} + 3 h^2 \delta = 0 \quad (3)$$

Ipotezziamo $\delta = \Delta \sin \omega_{osc} t \Rightarrow \ddot{\delta} = -\Delta \omega_{osc}^2 \sin \omega_{osc} t$
per cui otteniamo dalla (3)

$$-m^2 R^4 \Delta \omega_{osc}^2 + 3 h^2 \Delta = 0$$

cioè

$$\omega_{osc}^2 = \frac{3 h^2}{m^2 R^4} \Rightarrow \omega_{osc} = \frac{h}{m R^2} \sqrt{3} = \omega \sqrt{3}$$

(2)

(iii) Poiché le due oscillazioni hanno frequenze che sono in rapporto irrazionale ($\sqrt{3}$) il moto globale è quasi-periodico

S. 3

Come nel problema dei due corridori, consideriamo la variabile

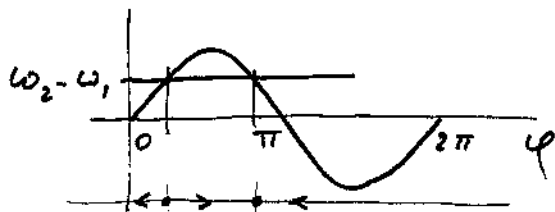
$$\varphi = \vartheta_1 - \vartheta_2$$

Sottraendo la II equazione di stato dalla I si ottiene

$$\dot{\varphi} = \omega_1 - \omega_2 + \left(\underbrace{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1}_{\text{prostaferesi}} \right) = \omega_1 - \omega_2 + \sin \varphi$$

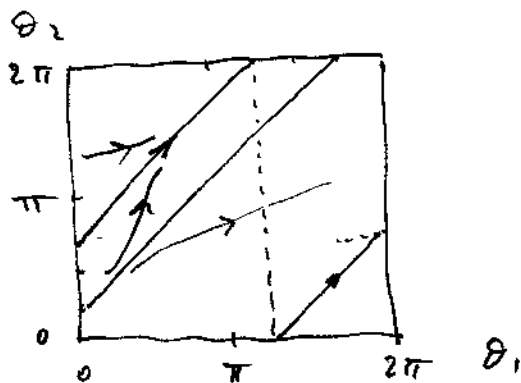
La fase φ varia, quindi, secondo una equazione differenziale di cui si possono facilmente determinare gli equilibri imponendo $\dot{\varphi} = 0$, cioè

$$\sin \varphi = \omega_2 - \omega_1$$



caso $\omega_1 < \omega_2 < \omega_1 + 1$

Pertanto, si hanno due equilibri (di cui uno stabile e l'altro instabile) e le traiettorie nel quadrato $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ di lato 2π sono le seguenti



si vede così che la fase $\varphi = \vartheta_1 - \vartheta_2$ tende a una costante così che le frequenze istantanee $\dot{\vartheta}_1$ e $\dot{\vartheta}_2$ tendono a diventare uguali (anche se in questo caso risultano varianti nel tempo)