

7. BIFORCAZIONI [17h]

- Stabilità strutturale e biforcazioni.
- Transcritica. Esempio (sfruttamento delle risorse).
- Nodo-sella. Esempio (catastrofi percettive).
- Forcone. Esempio (carico di punta).
- Isteresi. Cuspide. Esempi (blocco cardiaco).
- Tangente di cicli. Esempio (ponte di Tacoma).
- Hopf catastrofica e non catastrofica. Esempi (morbo di Parkinson, roulotte sull'autostrada).
- Esempio: la produzione nelle professioni creative.
- Hopf degenerare.
- Neimark-Sacker. Lingue di Arnold. Aggancio in frequenza.

----- solo fin qui

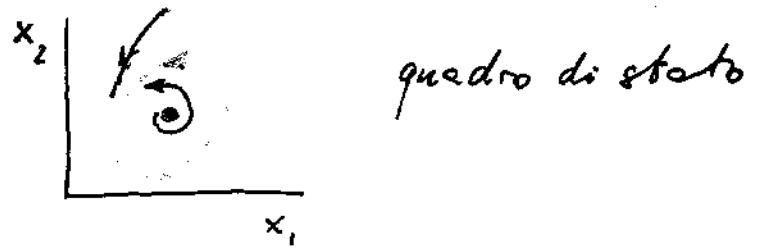
- Flip (raddoppio di periodo) e cascata di Feigenbaum.
- Omocline e eterocline. Esempi.
- Cicli e caos omoclino. Teoria di Andronov e Shilnikov. Esplosione di toro.
- Metodi numerici per l'analisi di biforcazione (cenni).
- Sistemi lenti-veloci. Esempi.
- Cicli lenti-veloci. Criterio di separazione.
- Esempio: anarchia e dispotismo nella Cina del Medioevo.

Problemi

Soluzioni

STABILITA' STRUTTURALE

$$\dot{x} = f(x)$$



Si dice che il sistema è strutturalmente stabile se variando di poco la funzione $f(\cdot)$ il quadro di stato rimane topologicamente equivalente.

Osservazione : due quadri di stato sono topologicamente equivalenti quando sono ottenibili l'uno dall'altro con semplici deformazioni

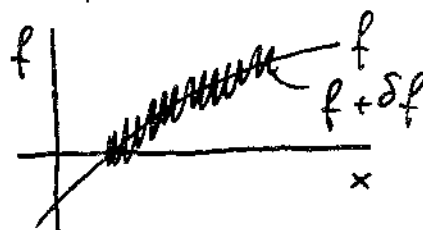
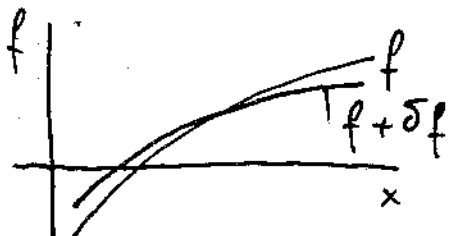
Esempio di quadri topologicamente equivalenti:



Esempio di quadri non topologicamente equivalenti:



Osservazione : la definizione richiede di precisare cosa si intenda per piccola perturbazione della funzione $f(\cdot) \Rightarrow$ PROBLEMA



Considereremo classi di sistemi parametrizzati

$$\dot{x} = f(x, p) \quad p = \text{costante}$$

Spesso i parametri hanno un preciso significato fisico e, quindi, quando si perturba f perturbando p si sa di cosa si parla

Definizione 1 (stabilità strutturale)

Un sistema $\dot{x} = f(x, \bar{p})$ è strutturalmente stabile se e solo se $\exists \varepsilon > 0$ tale che i quadri di stato di $\dot{x} = f(x, p)$ sono topologicamente equivalenti al quadro di stato di $\dot{x} = f(x, \bar{p})$

$$\forall p : \|p - \bar{p}\| < \varepsilon$$

A PAROLE : una piccola perturbazione parametrica di un sistema strutturalmente stabile non ne cambia qualitativamente la dinamica

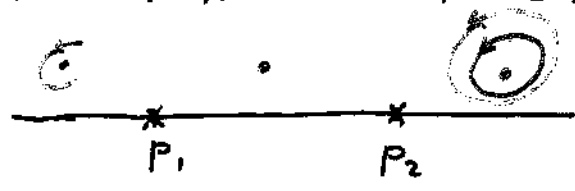
Definizione 2 (biforcazioni)

I valori \bar{p} tali che $f(x, \bar{p})$ non è strutturalmente stabile si chiamano biforcazioni

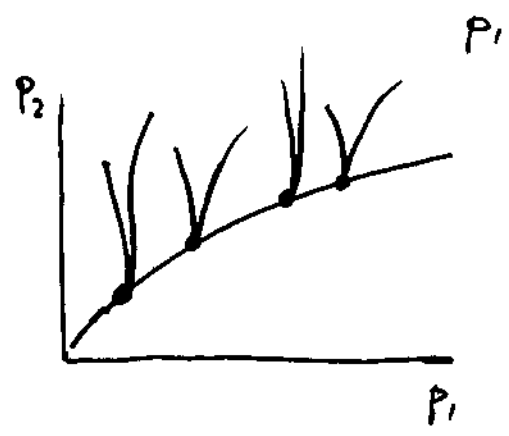
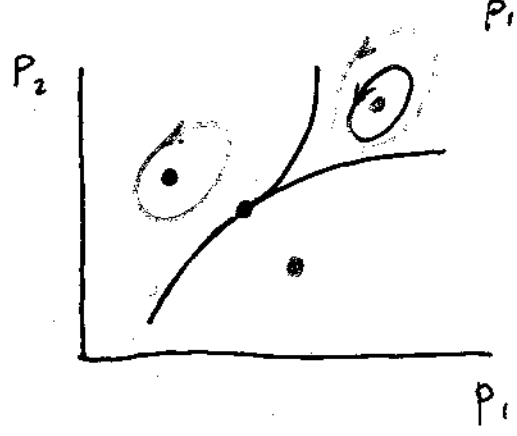
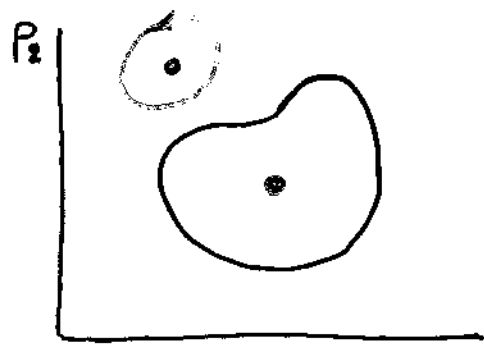
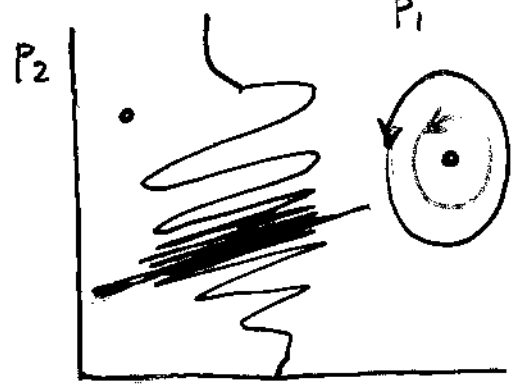
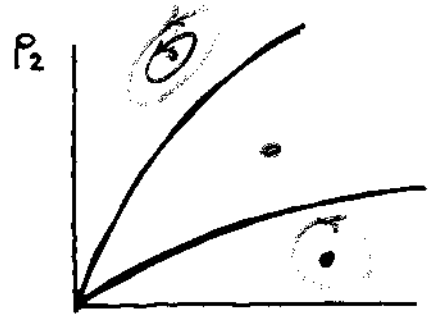
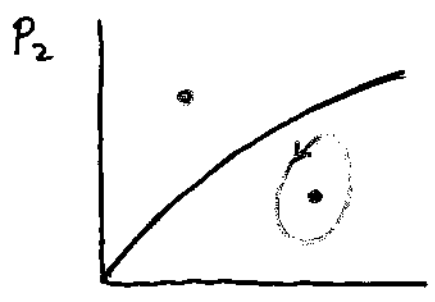
A PAROLE : un sistema è a una biforcazione se esiste la possibilità di cambiare qualitativamente la sua dinamica cambiando di poco un suo parametro

PUNTI, CURVE E SUPERFICI DI BIFORCAZIONE

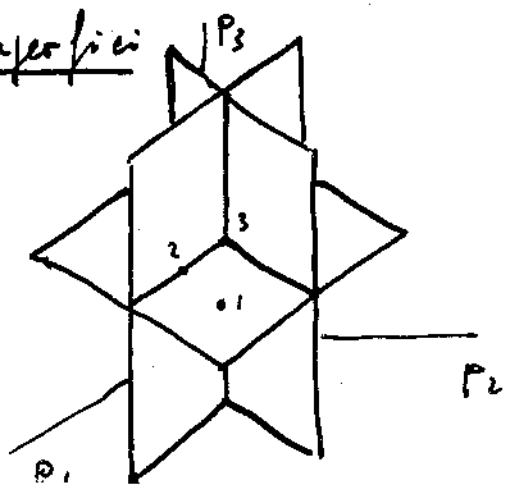
$p \in R^1$ punti



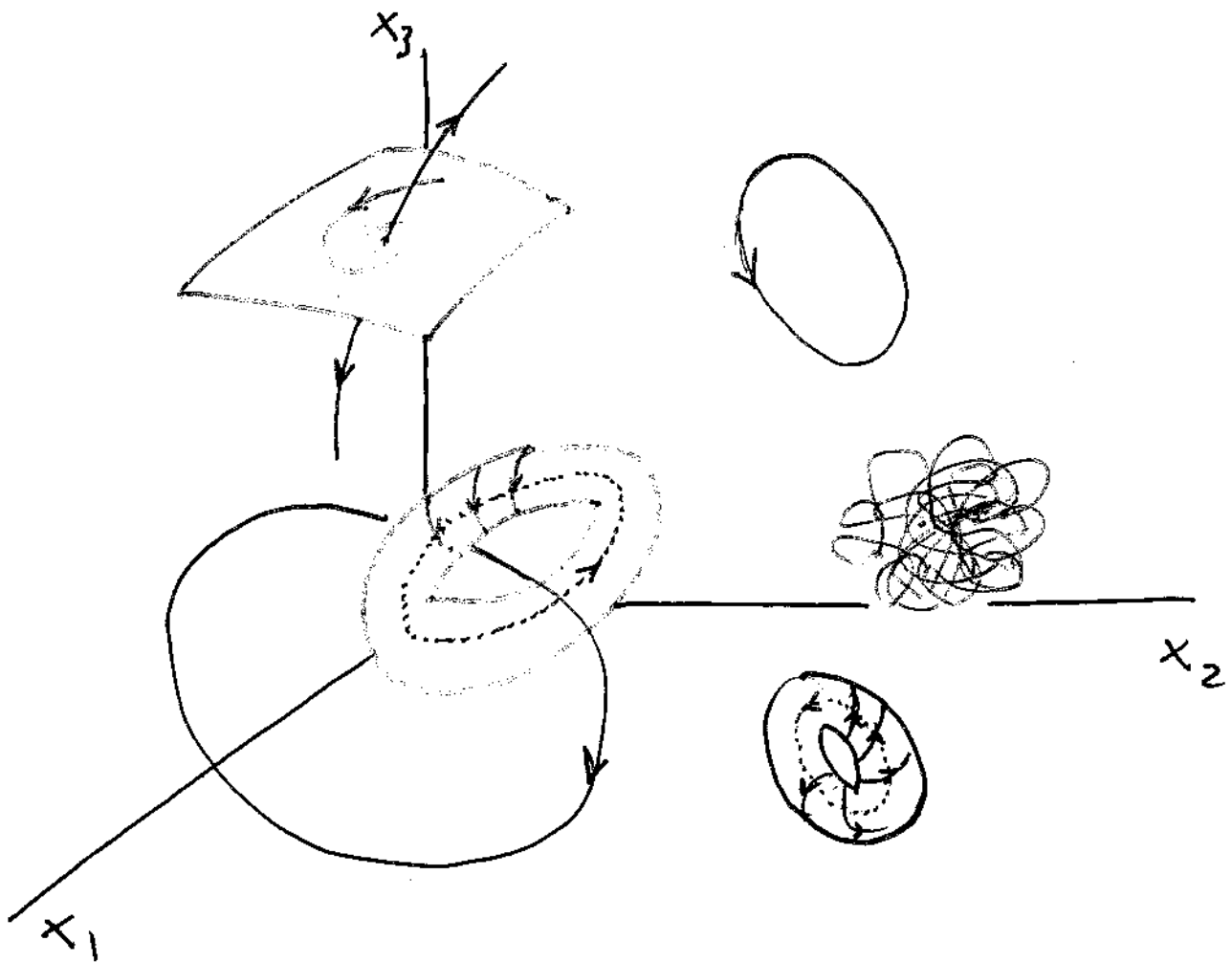
$p \in R^2$ curve



$p \in R^3$ superfici



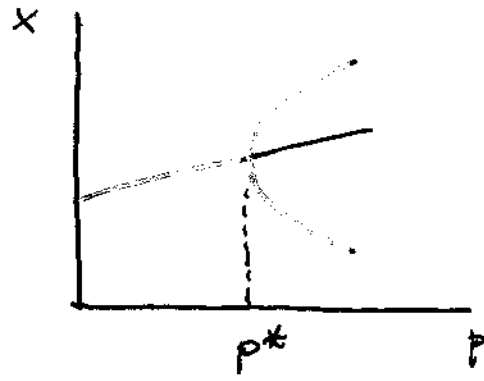
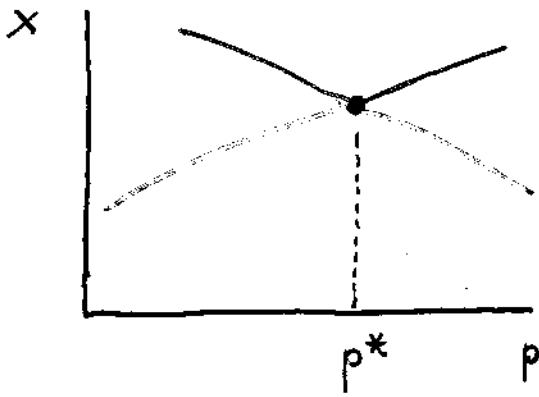
biforcazioni di codim. 1, 2, 3



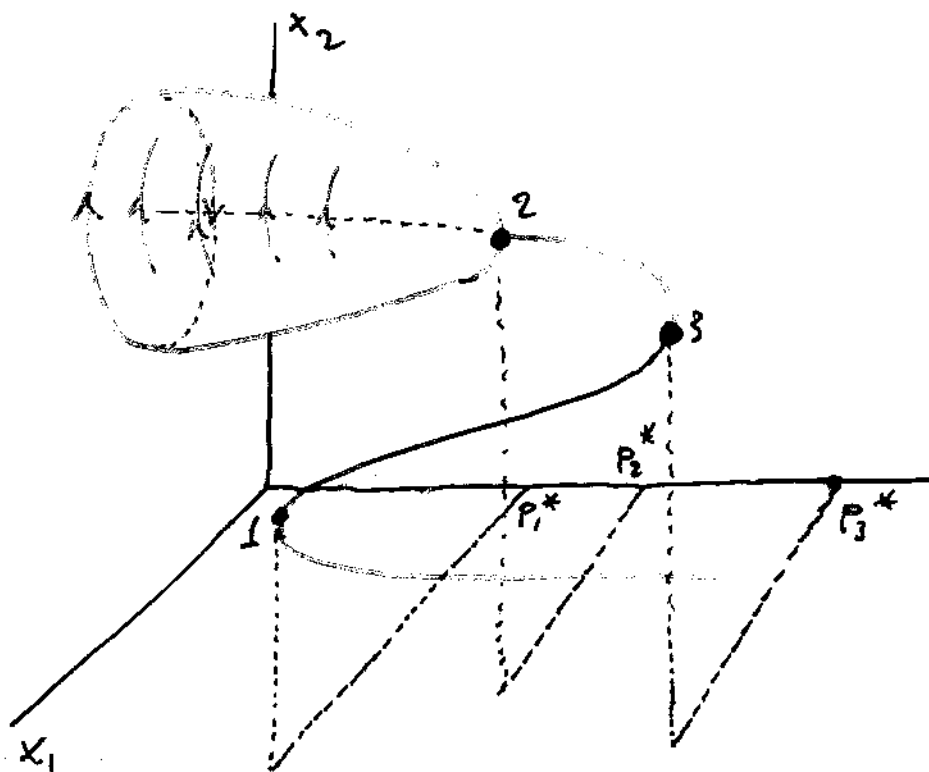
Per ogni valore p dei parametri il sistema è caratterizzato da un certo numero di attrattori, repulsori e selle con le loro varietà stabili e instabili. Se tutti questi insiemi (invarianti) non si toccano, una piccola variazione di p li lascerà separati e quindi p non sarà una biforcazione.

CONCLUSIONE

i valori p^* di biforcazione sono quelli a cui alcuni insiemi invarianti vanno in collisione



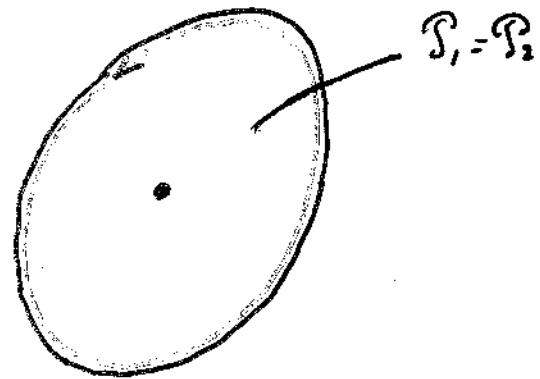
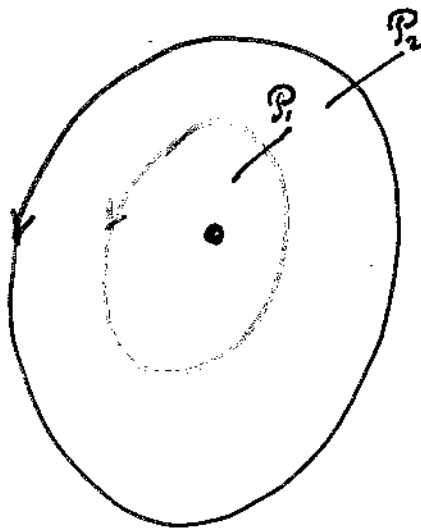
1 stato
1 param.



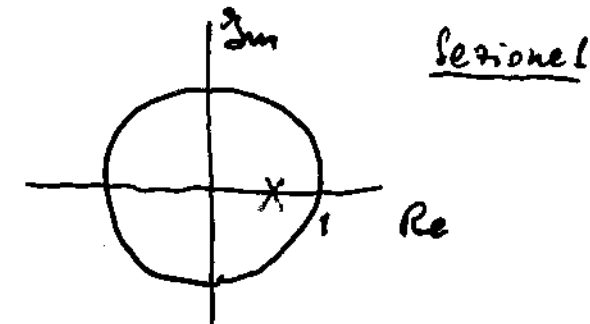
2 stati
1 parametro
3 b: forze.

Questo tipo di rappresentazione è molto efficace
ma è limitato al caso

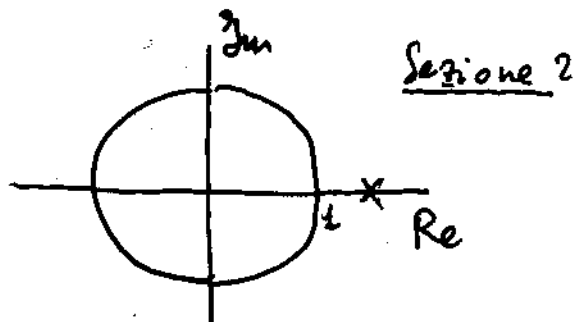
$$x \in R^1 \text{ o } x \in R^2 \text{ e } p \in R^1$$



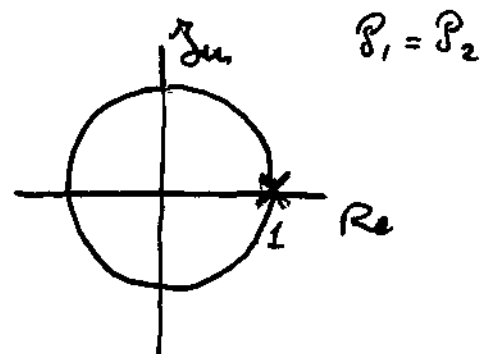
Variando un parametro i due cicli vanno in collisione (biforcazione). Seguiamo come variano al variare del parametro gli autovalori delle mappe di Poincaré linearizzate.



variando p



variando p



Quando avviene la collisione i due autovalori sono sulla frontiera di stabilità

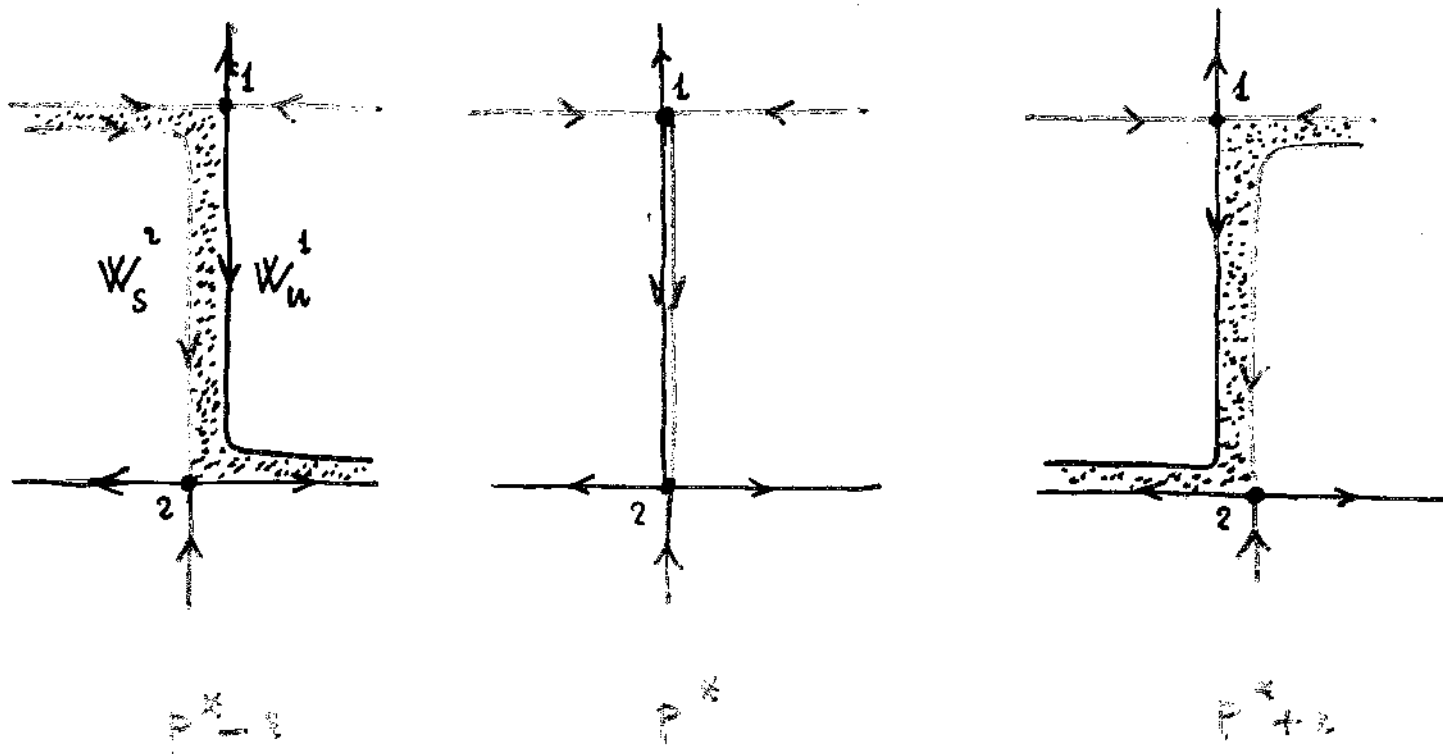
In pratica se al variare di p uno degli autovalori di uno dei Jacobiani arriva sulla frontiera di stabilità si ha una biforcazione (detta locale)

BIFORCAZIONI GLOBALI

7

Sono quelle che, pur corrispondendo a collisioni, non sono rivelabili con lo studio degli autovalori.

Facciamo un esempio



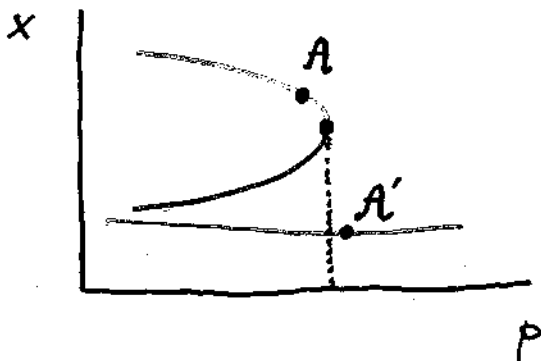
Per $p = p^*$ si ha una biforcazione perché variando p anche di un infinitesimo si forma un corridoio di traiettorie da sinistra a destra o da destra a sinistra che per $p = p^*$ non c'è (cioè il sistema per $p = p^*$ non è strutturalmente stabile).

Alle due selle e ai loro autovalori non accade nulla di significativo (localmente)

Tuttavia vanno in collisione la varietà instabile della sella 1 e la varietà stabile della sella 2

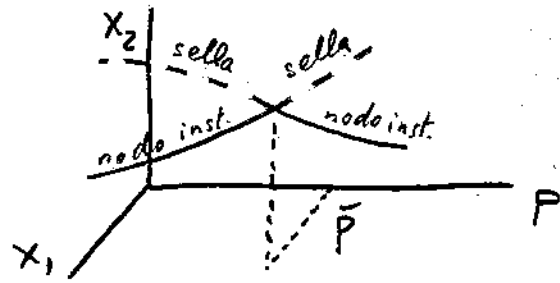
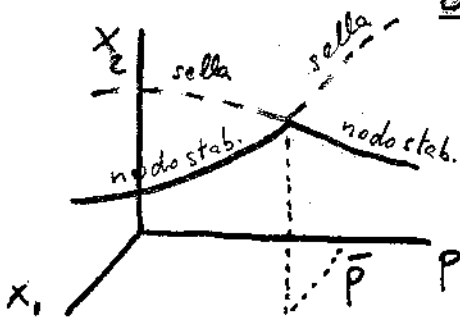
Può accadere che per $p = p^* - \varepsilon$ il sistema sia a regime su un attrattore A e che per $p = p^* + \varepsilon$ il sistema possa essere a regime solo su attrattori molto "lontani" da A . In questi casi un aumento improvviso di p , da $p^* - \varepsilon$ a $p^* + \varepsilon$, scatena un vistosissimo transitorio da A verso uno dei nuovi attrattori. In altre parole, una variazione microscopica di un parametro genera una transizione macroscopica nello spazio di stato. La biforcazione che genera questo fenomeno si chiama catastrofica, così come lo corrispondente transizione.

Esempi valanghe, terremoti, esplosioni, crolli, nascita, morte, rivoluzioni, ...



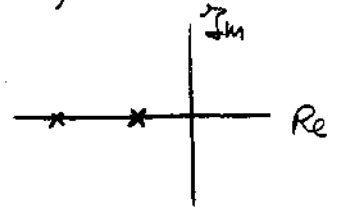
$A \rightarrow A'$ transizione
catastrofica

BIFORCAZIONE TRANSCRITICA (I)

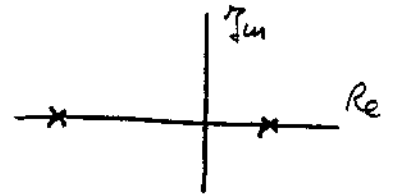


Per ogni valore di p ci sono due equilibri di cui uno è una sella. Il nodo può essere sia stabile che instabile. Il nodo e la sella collidono in \bar{p} dove cambiano la loro ~~stabilità~~ natura (il nodo diventa sella e viceversa)

$p < \bar{p}$ ($p > \bar{p}$) \rightarrow il nodo ha autovalori dello stesso segno

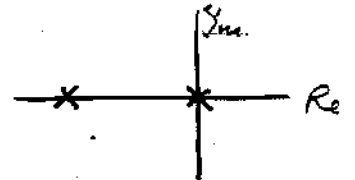


la sella ne ha uno positivo e uno negativo



$p = \bar{p}$

\rightarrow le matrici Jacobiane dei due equilibri devono avere gli stessi autovalori \Rightarrow un autovalore del nodo e un autovalore della sella devono essere sulla frontiera di stabilità.



N. B. la biforcazione transcritica è chiamata anche biforcazione scambio di stabilità (questa terminologia è appropriata nel I caso ma non nel II)

BIFORCAZIONE TRANSCRITICA (2)

Esempio: (sfruttamento delle risorse)

$x(t)$ = risorsa

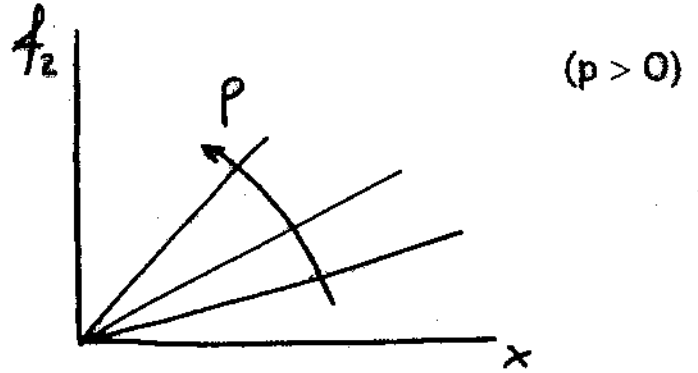
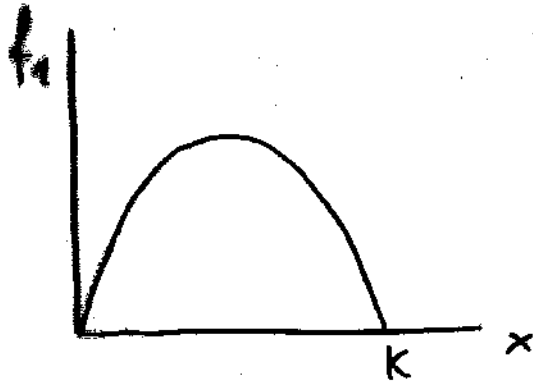
p = sforzo di sfruttamento (per esempio # pescherecci)

$$\dot{x} = f_1(x) - f_2(x, p) = f(x, p)$$

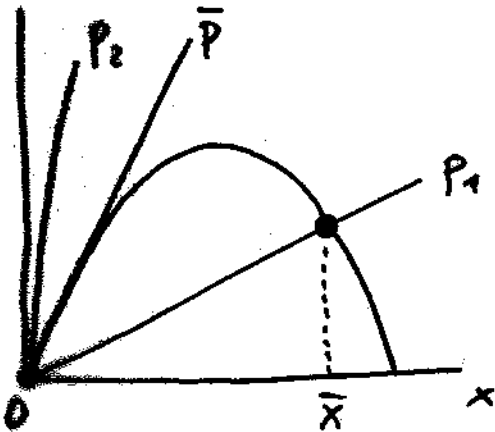
p = sforzo

logistica $\rightarrow f_1 = rx(1 - \frac{x}{k})$

sfruttamento $\rightarrow f_2 = px$



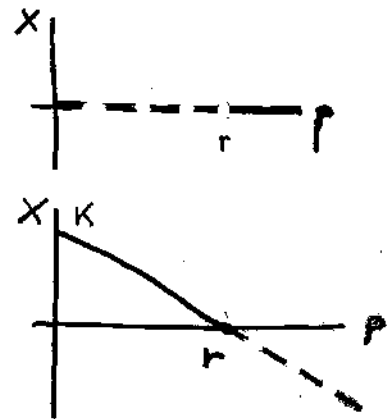
Equilibri $\rightarrow f_1 = f_2$



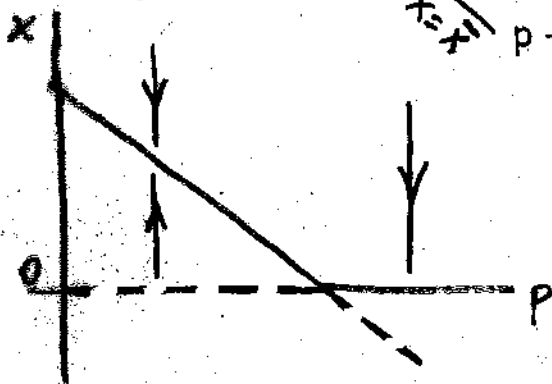
$x=0$

$\bar{x} = k - \frac{k}{r}p$

$\bar{x}=0 \rightarrow \bar{p}=r$



$\frac{\partial f}{\partial x} = r - 2\frac{r}{k}x - p$	$x=0$	$r-p$	+	$p < r$	INSTABILE
	$x=\bar{x}$	$p-r$	-	$p > r$	STABILE
	$x=0$	$p-r$	-	$p < r$	STABILE
	$x=\bar{x}$	$r-p$	+	$p > r$	INSTABILE



\bar{p} = transcritica

BIFORCAZIONE TRANSCRITICA (3)

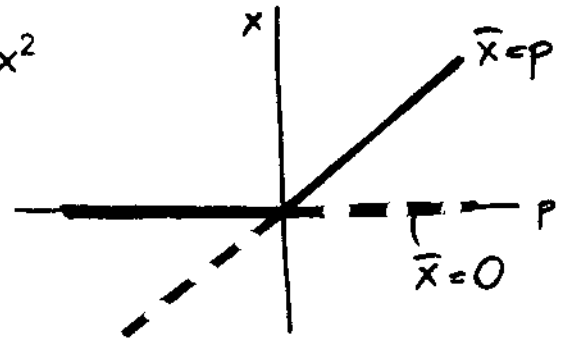
Biforcazioni transcrittiche (di equilibri) possono presentarsi in sistemi di qualsiasi ordine: anche in sistemi del primo ordine (come visto nell'esempio)

La più semplice forma di una biforcazione si chiama forma normale.

La forma normale della biforcazione transcrittica è

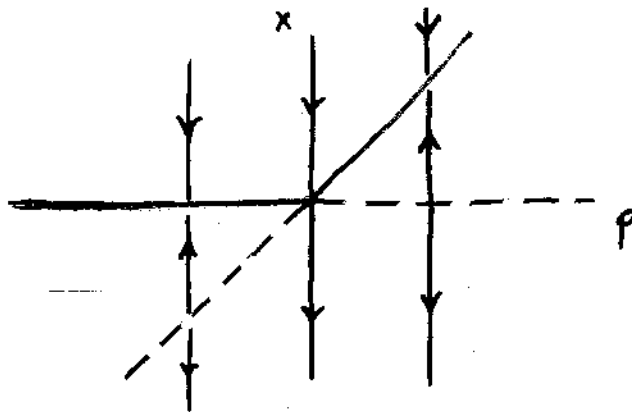
$$\dot{x} = px - x^2$$

$$\text{Equilibri} \rightarrow \dot{x} = 0 \rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = p \end{cases}$$



$$\text{Stabilità} \rightarrow J = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}} = p - 2\bar{x} = \begin{cases} p \\ -p \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \bar{x} = 0 & \text{stabile} \Leftrightarrow p < 0 \\ \bar{x} = p & \text{stabile} \Leftrightarrow p > 0 \end{array}$$



essere indeterminata perché può essere catastrofica ma anche non

$p \neq 0 \rightarrow$ due equilibri

$p = 0 \rightarrow$ un solo equilibrio \Rightarrow collisione di equilibri

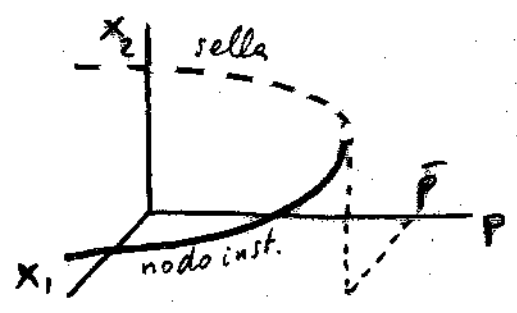
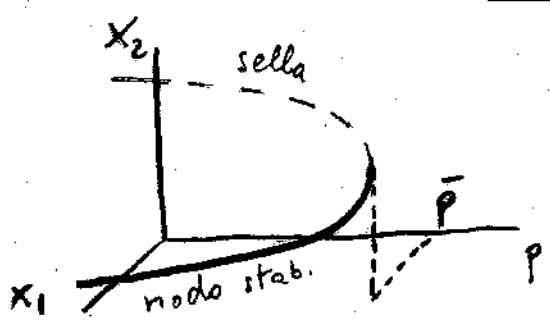
\Rightarrow il sistema non è strutturalmente stabile

\Rightarrow l'autovalore si trova sulla frontiera di stabilità

\Downarrow

$p = 0$ è un punto di biforcazione

BIFORCAZIONE NODO-SELLA (1)



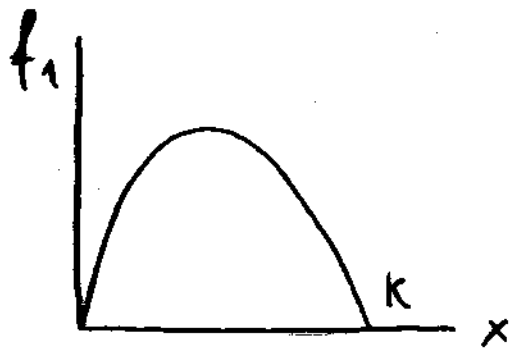
Per $p < \bar{p}$ ci sono due equilibri di cui uno è una sella.
 Il nodo e la sella collidono in \bar{p} e scompaiono per $p > \bar{p}$.
 In $p = \bar{p}$ un autovalore del nodo e della sella sono sulla frontiera di stabilità.

Esempio: (sfruttamento delle risorse)

$x(t)$ = risorsa

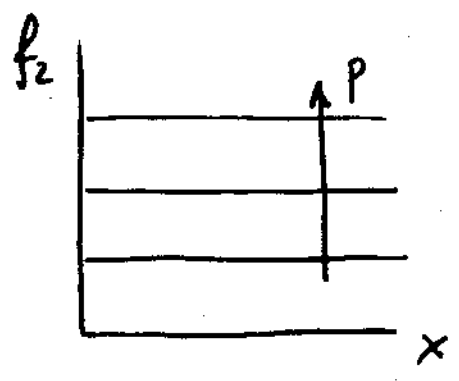
$\dot{x} = f_1(x) - f_2(x, p) = f(x, p)$

logistica $\rightarrow f_1 = rx(1 - \frac{x}{k})$



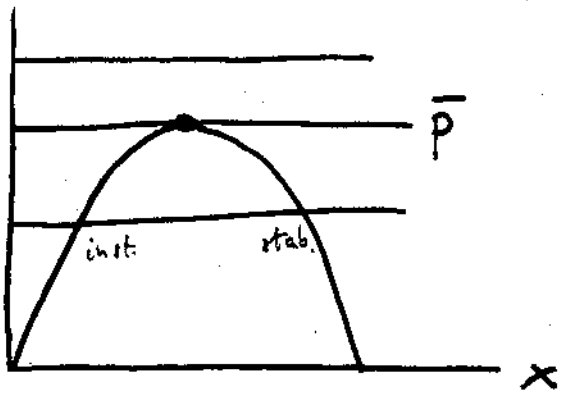
cattura costante
 \downarrow

sfruttamento $\rightarrow f_2 = p$

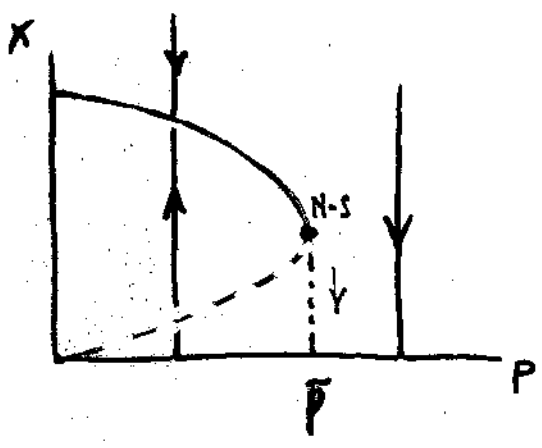


($p > 0$)

Equilibri $\rightarrow f_1 = f_2$



\bar{p} = nodo-sella
 collasso della risorsa

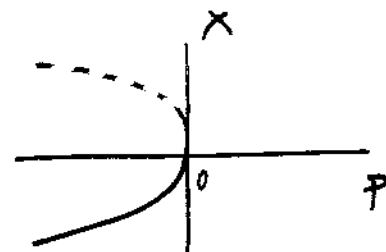


BIFORCAZIONE NODO-SELLA (2)

Biforcazioni nodo-sella possono presentarsi anche in sistemi del primo ordine (come visto nell'esempio).

La forma normale della biforcazione nodo-sella è

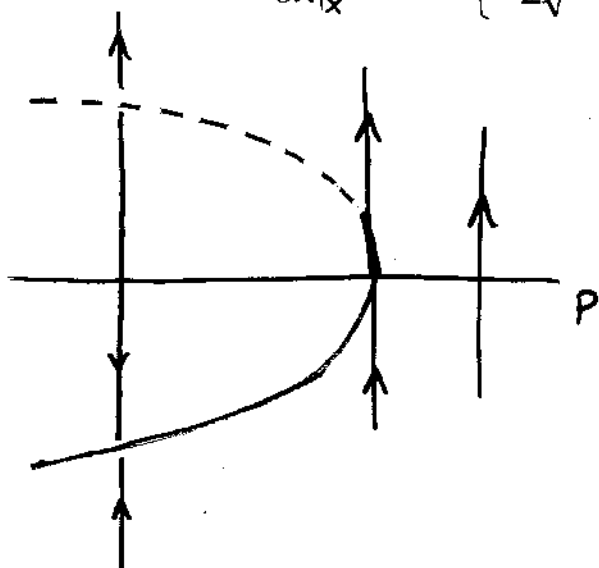
$$\dot{x} = p + x^2$$



Equilibri $\rightarrow \dot{x} = 0 \rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \sqrt{-p} \\ \bar{x} = -\sqrt{-p} \end{cases} \quad p < 0$

Stabilità $\rightarrow J = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}} = 2\bar{x} = \begin{cases} 2\sqrt{-p} & \bar{x} > 0 \\ -2\sqrt{-p} & \bar{x} < 0 \end{cases}$

instabile
stabile



Catastrofica
(la transizione catastrofica in questo caso porta lo stato del sistema da 0 a $+\infty$)

$p < 0 \rightarrow$ due equilibri

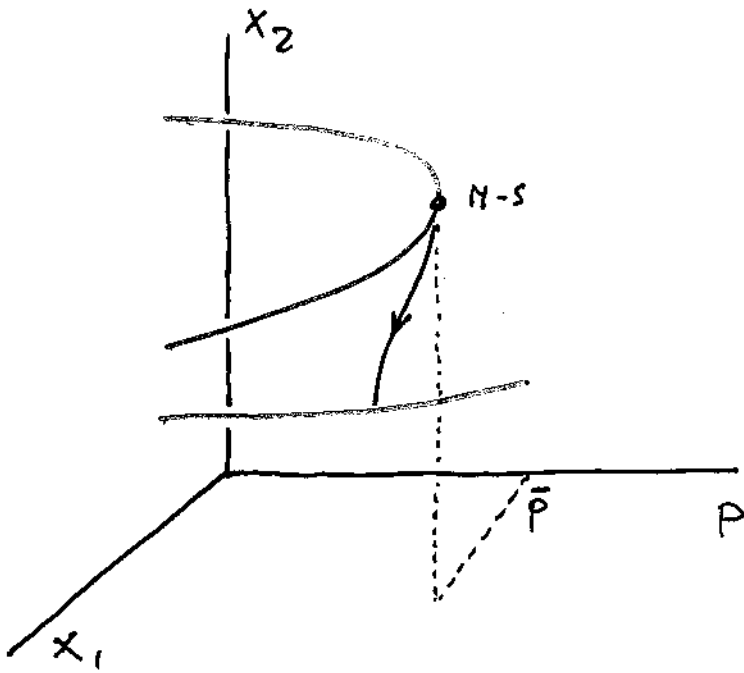
$p = 0 \rightarrow$ un solo equilibrio \Rightarrow collisione di equilibri

\Rightarrow il sistema non è strutturalmente stabile

\Rightarrow l'autovalore si trova sulla frontiera di stabilità

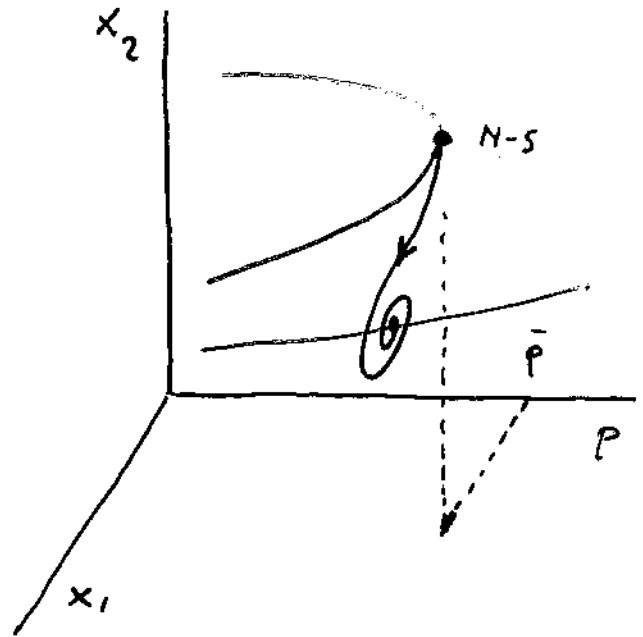


$p = 0$ è un punto di biforcazione



caso in cui l'attrattore post-catastrofe è un nodo stabile

esempi: valanghe, frane, slavine, ...



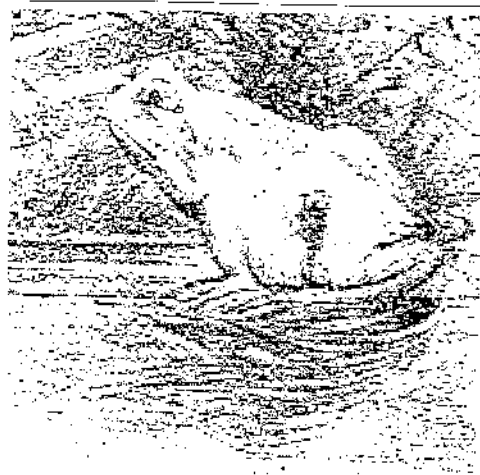
caso in cui l'attrattore post-catastrofe è un fuoco stabile

esempi: terremoto, orgasmo,

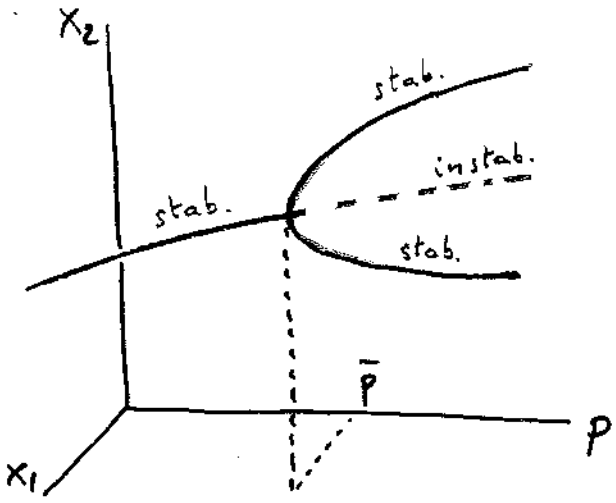
Catastrofi percettive

verrà la morte ... e avrà i tuoi occhi

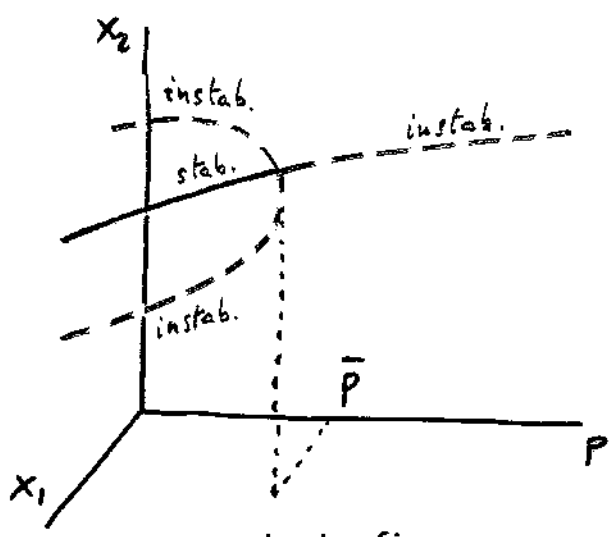
↓ stato di angoscia ⇒ felicità (transizione grande)



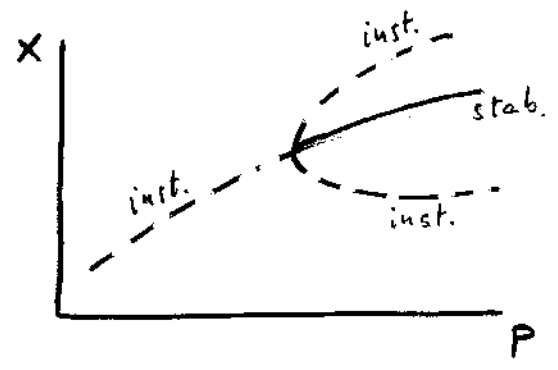
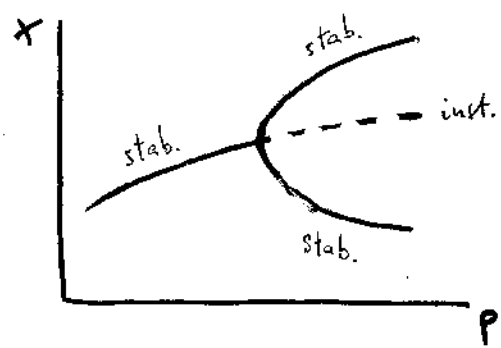
BIFORCAZIONE FORCONE



non catastrofica
(supercritica)

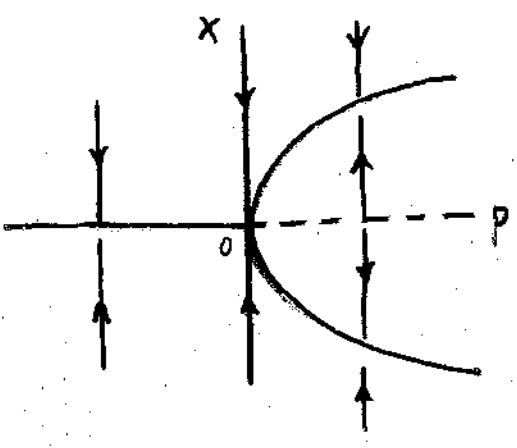


catastrofica
(subcritica)

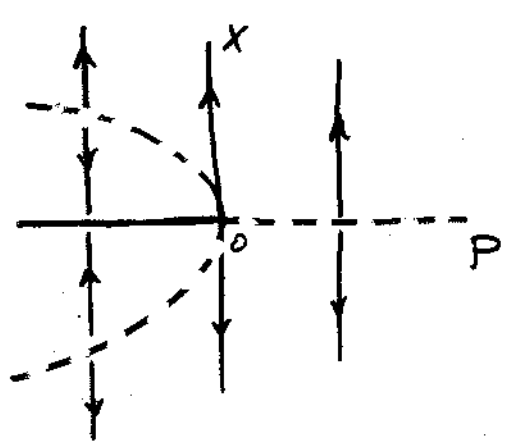


La forma normale della biforcazione forccone è

$$\dot{x} = px - x^3$$



$$\dot{x} = px + x^3$$



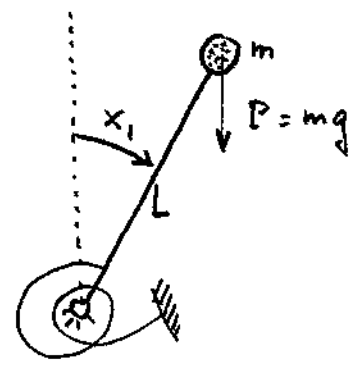
ESEMPIO : CARICO DI PUNTA



asta caricata di punta

⇒ sistema a parametri distribuiti (equazioni alle derivate parziali)

Trattazione semplificata (a parametri concentrati)



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J} (PL \sin x_1 - Kx_1 - Hx_2)$$

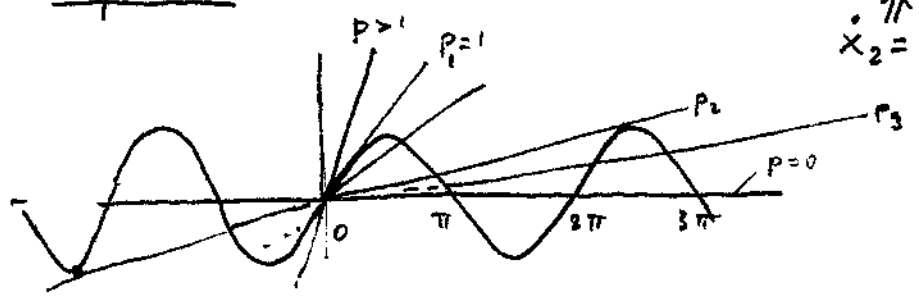
momento d'inerzia

momento di richiamo

momento di attrito viscoso

Equilibri

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \sin x_1 = \frac{K}{PL} x_1$$



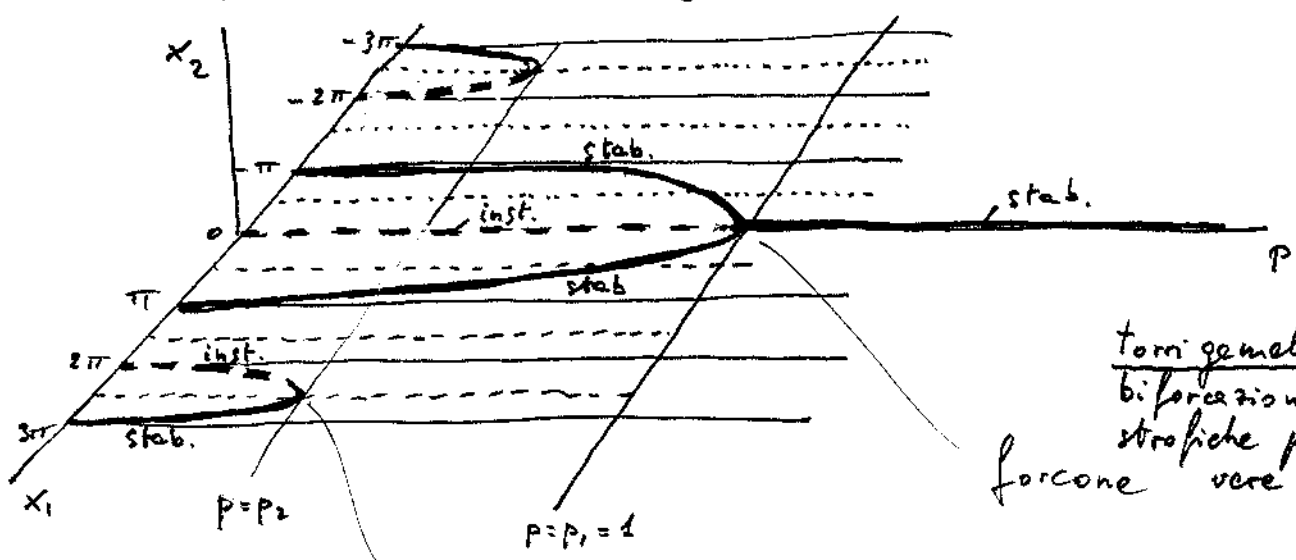
retta di coefficiente angolare K/PL
parametro p

$p_1 > p_2 > p_3 > \dots$ sono biforcazioni

$$J_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{PL-K}{J} & -\frac{H}{J} \end{vmatrix}$$

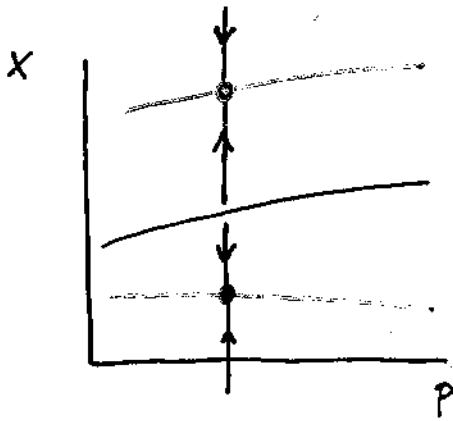
traccia $J_0 < 0$
 $\det J_0 = \frac{K-PL}{J}$

$$\Rightarrow (\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0) = \text{as. stab.} \Leftrightarrow p = \frac{K}{PL} > 1$$



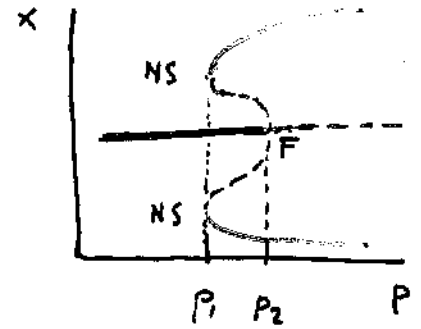
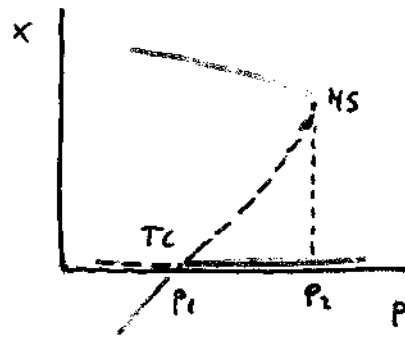
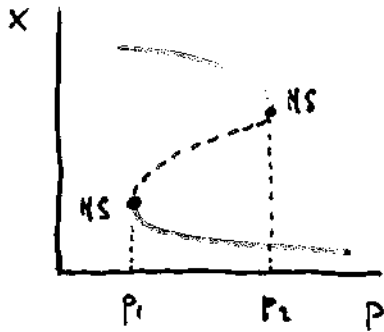
torri gemelle: anche biforcazioni non catastrofiche possono implicare forcone vere catastrofi

sella

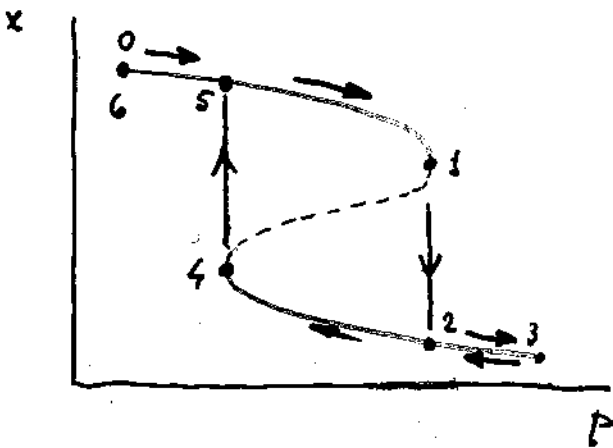


quando esistono 2 attrattori
si dice che il sistema è bistabile

La bistabilità è spesso presente in un campo dei parametri

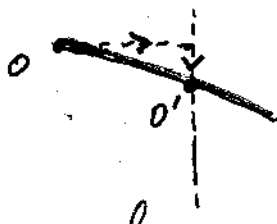


Cosa succede se il parametro è variato per incrementi piccoli e rari?



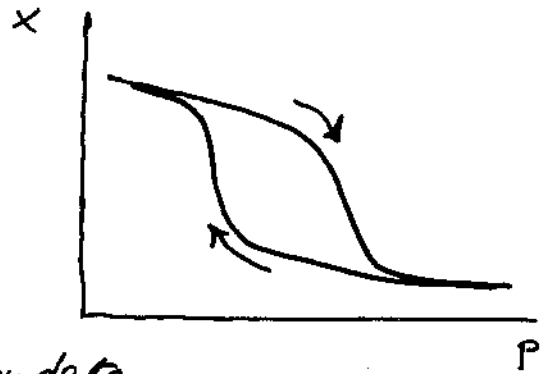
Partiamo da p_0 corrispondente all'unico equilibrio stabile O .
Se si incrementa p di poco lo stato del sistema, pari a x_0 , non è più all'equilibrio ma è però nel bacino di attrazione dello stato di equilibrio corri-

spondente al nuovo valore di p . Si ha così una transizione da O a O' sul ramo stabile alto.



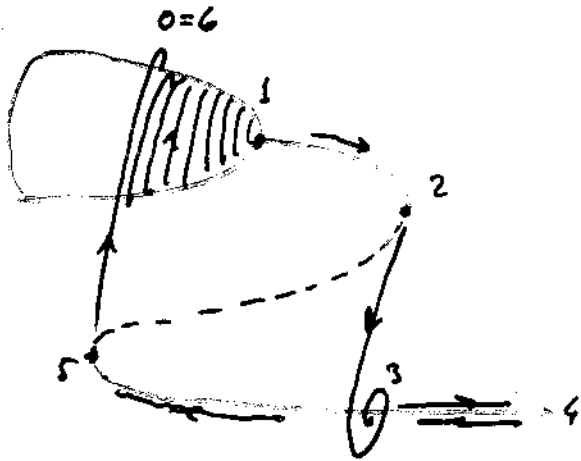
Si continua così passo-passo fino a 1 dove si catastrofa in 2 per poi continuare, ad esempio fino a 3. Si torna poi indietro, se si riduce p , fino a 4 dove si ha una nuova catastrofe e si chiude l'isteresi in 5.

Se il parametro è variato con continuità e un po' troppo in fretta il sistema non ha tempo per raggiungere l'equilibrio e la curva che si rileva sperimentalmente è un po' arrotondata.

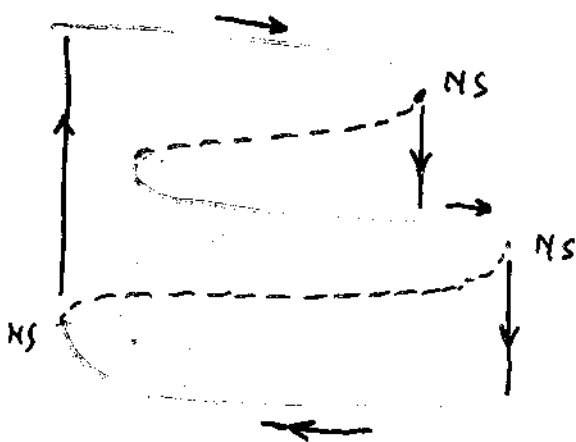


L'isteresi non necessita di molte variabili (come si credeva un tempo): ne basta anche solo una, ma sono necessarie 2 biforcazioni.

L'isteresi può anche essere più complessa di quelle mostrate



in una isteresi di questo tipo si salta da un regime stazionario (2) ad un altro regime stazionario (3), ma anche da un regime stazionario (5) a uno ciclico (6).



in questo caso invece l'isteresi è caratterizzata da tre transizioni catastrofiche (tutte di tipo nodo-sella)

Esempio : sfruttamento delle risorse

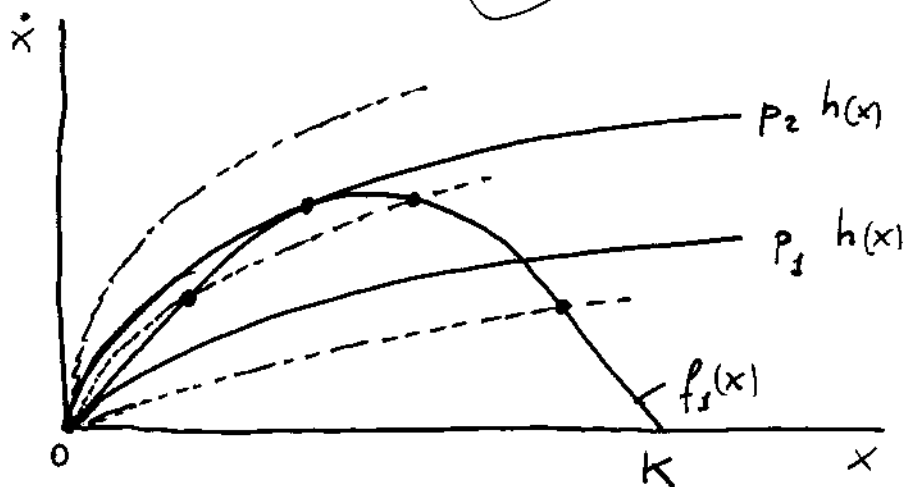
$x(t)$ = abbondanza di risorse all'istante t

$$\dot{x} = f_1(x) - f_2(x, p)$$

p = sforzo di sfruttamento

$$\dot{x} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - p \left(\frac{ax}{b+x}\right) h(x)$$

← Holling tipo II



$0 < p < p_2$

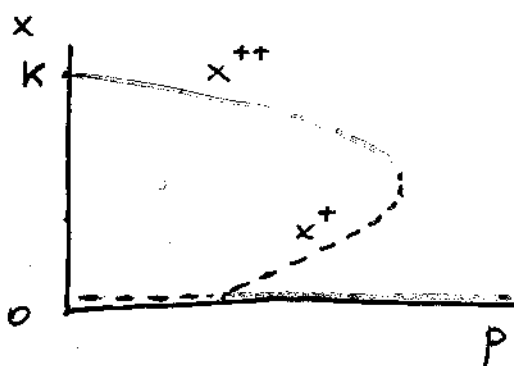
due equilibri : $\bar{x} = 0$ e \bar{x}^{++}

$p_1 < p < p_2$

tre equilibri : $\bar{x} = 0$ e \bar{x}^+, \bar{x}^{++}

$p > p_2$

un solo equilibrio : $\bar{x} = 0$



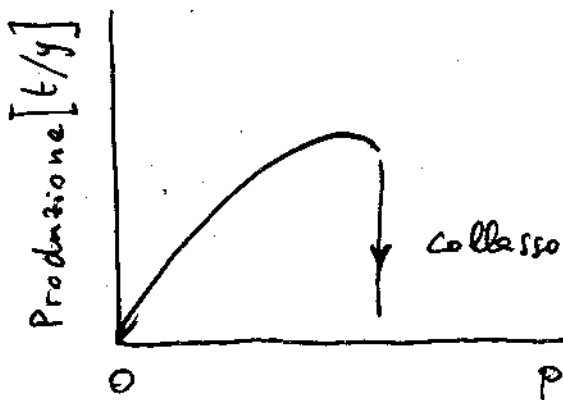
x^{++} è stabile perché lo Jacobiano $[f_1' - p h']_{x^{++}} < 0$

x^+ è instabile perché lo Jacobiano $[f_1' - p h']_{x^+} > 0$

consideriamo la produzione

$$Y = p \frac{ax^{++}}{b+x^{++}} \text{ al variare di } p$$

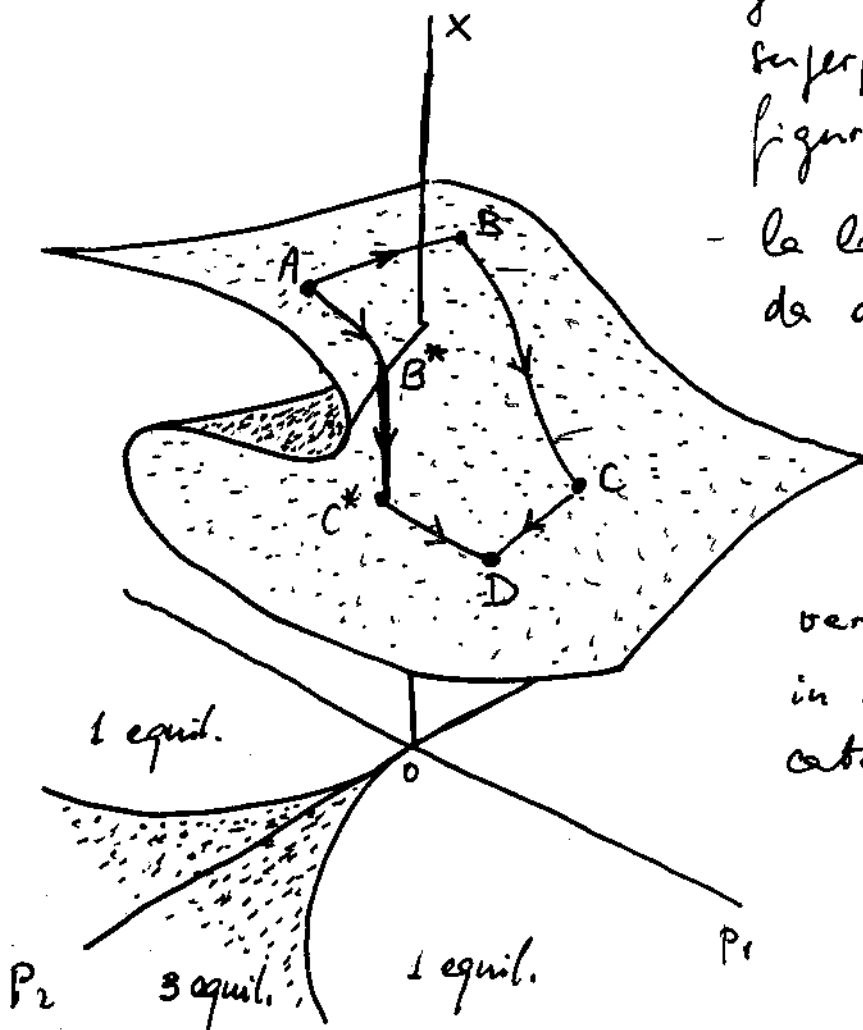
senza grandi segni premonitori si ha un collasso delle risorse (e, quindi, della produzione)



Sistemi dinamici con due parametri sono spesso caratterizzati da particolarissime combinazioni di biforcazioni. La più nota è la cuspidale (due nodo-sella rispetto a un parametro e un forcone rispetto all'altro)

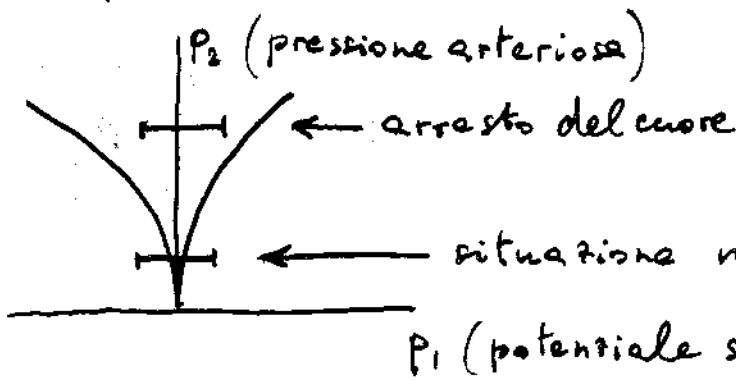
La forma normale della cuspidale è $\dot{x} = p_1 + p_2 x - x^3$

- gli equilibri giocano sulla superficie rappresentata in figura
- la loro stabilità è facile da disantare guardando al segno dello Jacobiano



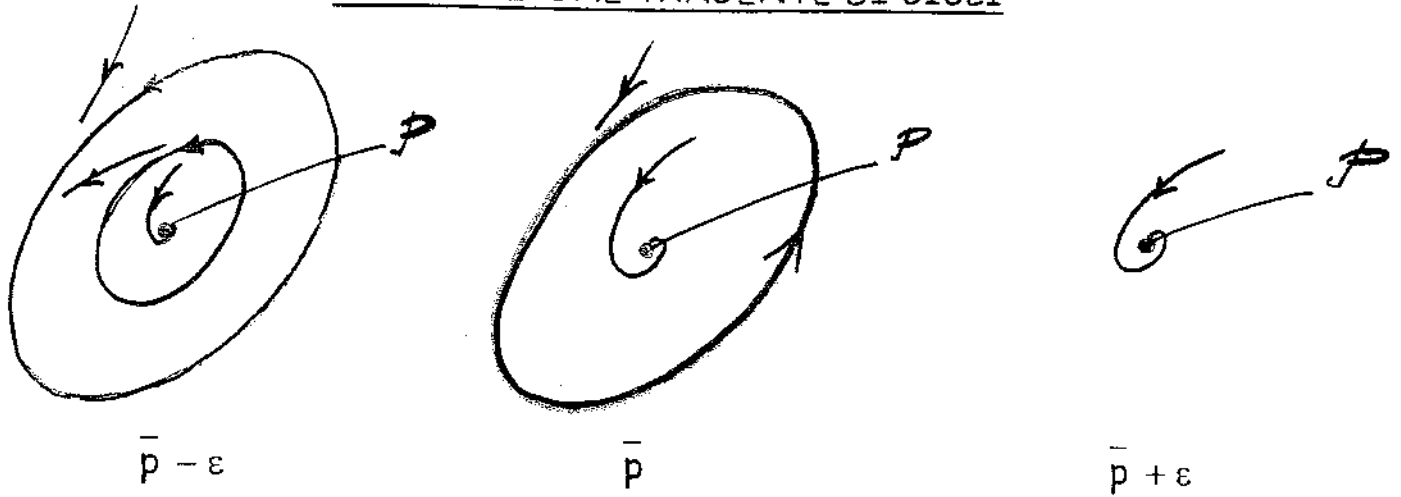
Si può andare da A a D variando passo-passo i parametri in modo da evitare la catastrofe $B^* \rightarrow C^*$

Esempio: arresto cardiaco



In condizioni normali p_1 varia periodicamente (circa 1 Hz) come mostrato in figura per cui si ha un ciclo isteretico con transizioni catastrofiche (diastole e sistole). se p_2 aumenta il cuore si ferma

BIFORCAZIONE TANGENTE DI CICLI



sulla sezione di Poincaré \mathcal{P}



collisione di due equilibri
(biforcazione nodo-sella di equilibri)

N. B. La biforcazione tangente di cicli è catastrofica

Per $p < \bar{p}$ ci sono due cicli che collidono in \bar{p} e scompaiono per $p > \bar{p}$.

In $p = \bar{p}$ un autovalore dello Jacobiano della mappa di Poincaré è sulla frontiera di stabilità \Rightarrow modulo unitario.

Da destra verso sinistra \Rightarrow nasce un ciclo con ampiezza e periodo finiti



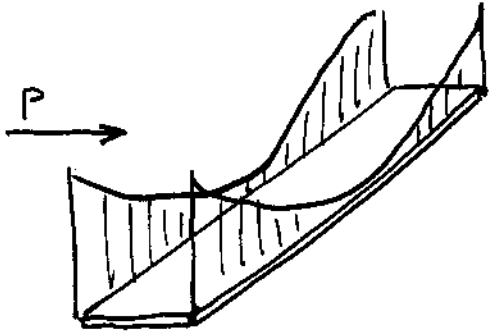
ciclo non degenero

Esistono altri modi di nascere (morire) di un ciclo che vedremo

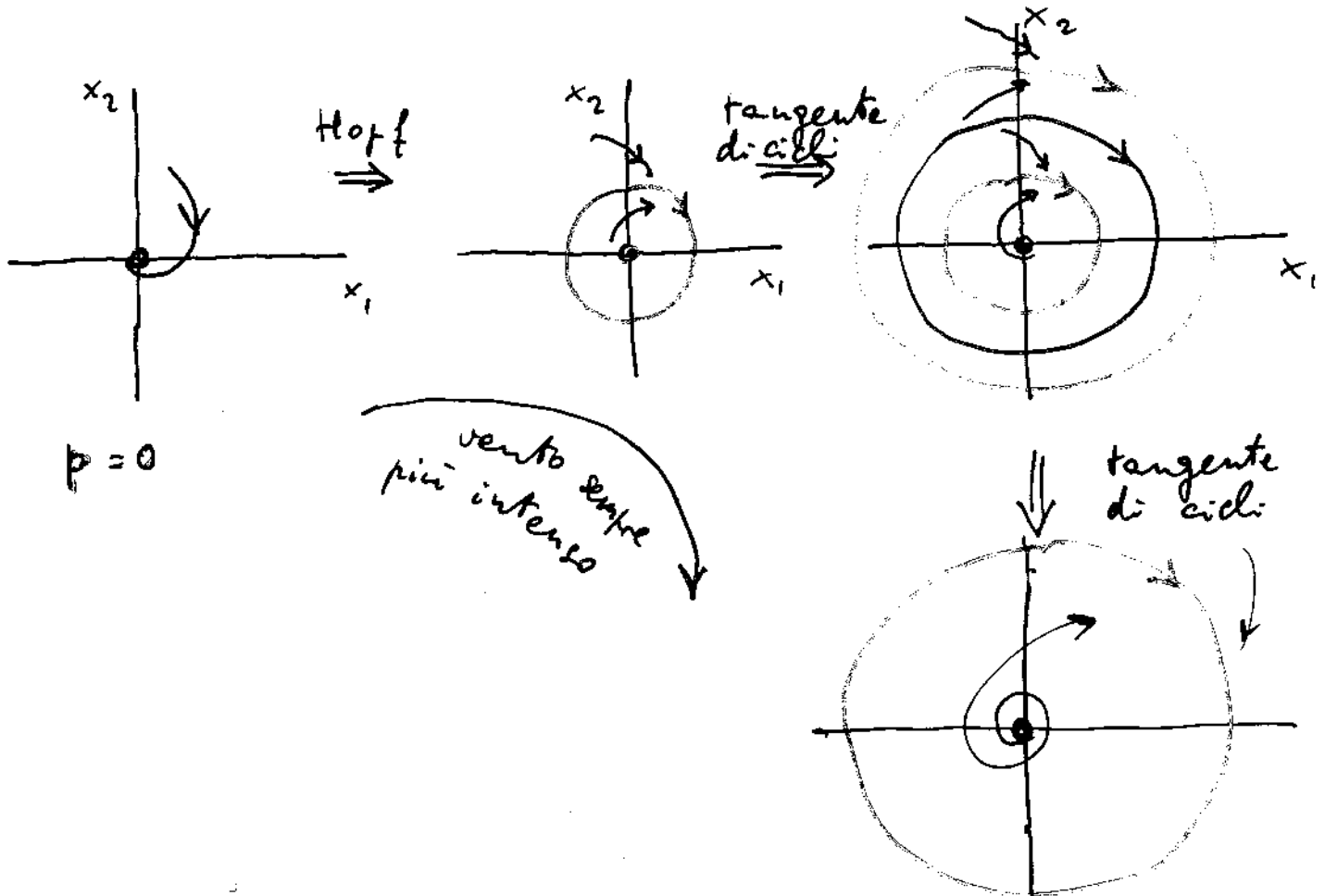
Hopf \Rightarrow nasce un ciclo con ampiezza degenera (ampiezza nulla)

Omoclina \Rightarrow nasce un ciclo con periodo degenero (periodo infinito)

ESEMPIO : Ponte di Tacoma



struttura meccanica molto
esile e flessibile immersa
in un campo di vento a
velocità p costante



Quando la velocità del vento supera il valore della seconda biforcazione tangente le oscillazioni (già grandi) diventano grandissime (e la struttura eventualmente si rompe per mancanza di elasticità sufficiente (non modellizzata))

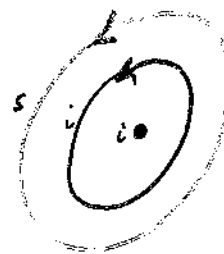
Biforcazione transcritica in \mathbb{R}^2 (è impossibile: perché?)



$\bar{p} - \epsilon$

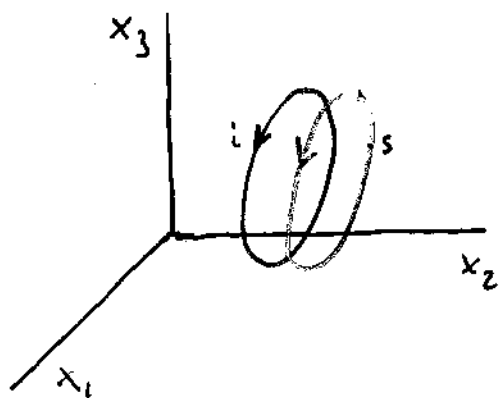


\bar{p}

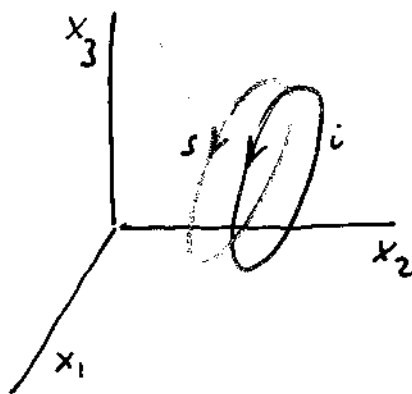


$\bar{p} + \epsilon$

Biforcazione transcritica in \mathbb{R}^3



\Rightarrow

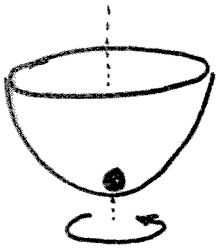


Biforcazione pincione in \mathbb{R}^2

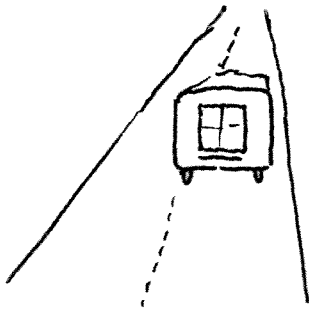


\Rightarrow

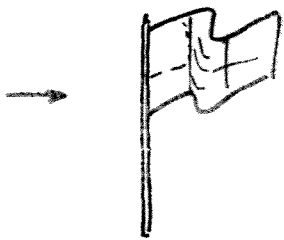




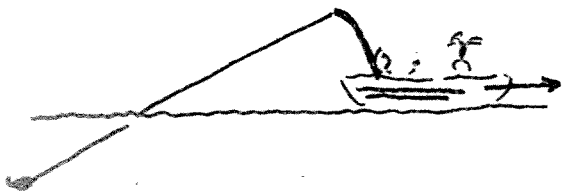
tazza rotante a velocità costante ω :
se ω è sufficientemente alto la
pallina si alza e gira a una certa
quota



roulotte sull'autostrada a velocità
costante v : se la velocità è suffi-
cientemente elevata la roulotte oscilla



bandiera al vento con velocità
costante v : se la velocità è suffi-
cientemente elevata la bandiera
sventola.



pesca a traino a velocità v :
se la velocità è troppo elevata
l'esca oscilla come quota

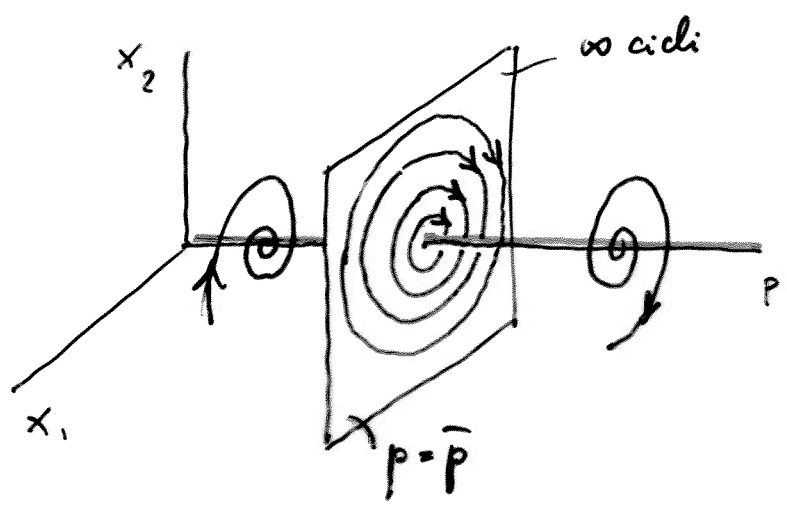
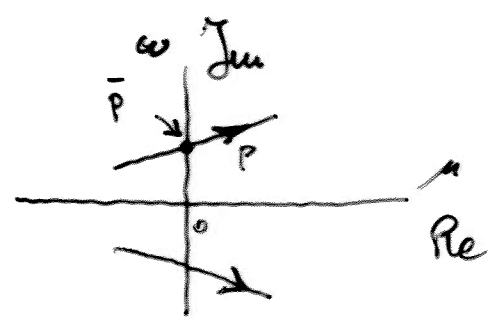
oscillatori elettrici, reazioni chimiche di tipo periodico,
il morbo di Parkinson (parametro =?....(età)), il tremore
da freddo o paura, un famosissimo verso di Dante, ...

BIFORCAZIONE DI HOPF

Sistemi lineari

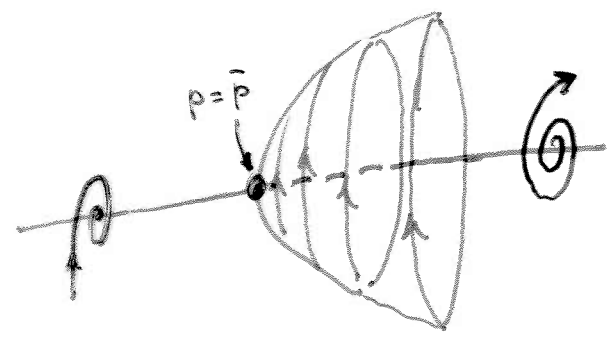
$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= a_{11}(p)X_1 + a_{12}(p)X_2 \\ \dot{X}_2 &= a_{21}(p)X_1 + a_{22}(p)X_2 \end{aligned}$$

$$\lambda = \mu(p) \mp i\omega(p)$$



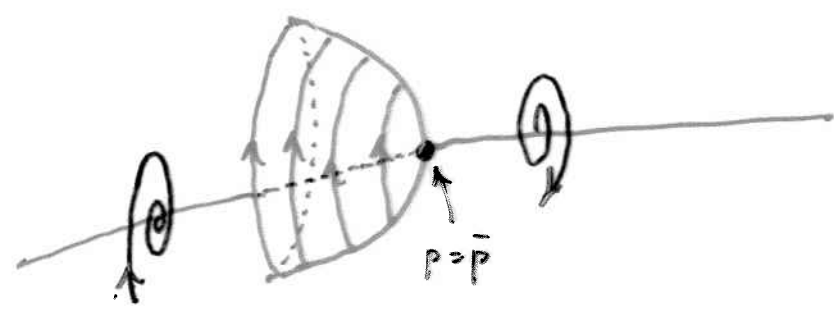
I cicli esistono solo per $p = \bar{p}$

Sistemi non lineari



Hopf non catastrofica (supercritica H^s)

Ciclo unico inizialmente piccolo



Hopf catastrofica (subcritica H_s)

Ciclo unico inizialmente piccolo

Condizione di Hopf

$$\dot{x} = f(x, p) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(complessi coniugati $\mu(p) \pm i\omega(p)$ che per $p = \bar{p}$ sono)
 \exists due autovalori immaginari: $\pm i\omega(\bar{p})$

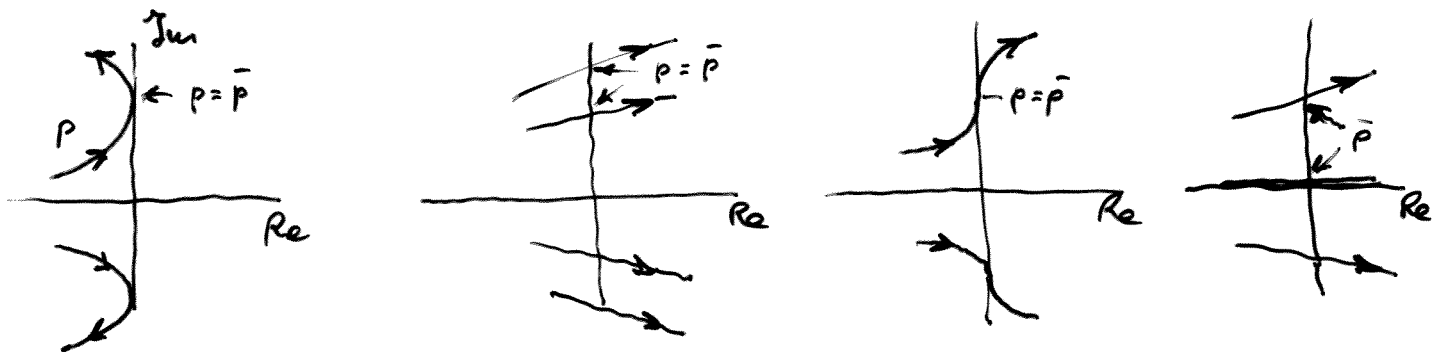
* condizioni di non degenerazione

($\omega(\bar{p}) \neq 0$, $\frac{d\mu(p)}{dp} \neq 0$, \nexists altri autovalori con parte reale nulla, ...) per $p = \bar{p}$



Nasce un ciclo per $p = \bar{p}$ e tale ciclo esiste ed è unico (o per $p < \bar{p}$ o per $p > \bar{p}$) in piccolo (cioè per piccoli scostamenti di p da \bar{p}). Inoltre, le dimensioni del ciclo crescono come $\sqrt{|p - \bar{p}|}$.

Esempi di Hopf degeneri



Sistemi del II ordine

Condizione di Hopf : \exists un equilibrio \bar{x} con

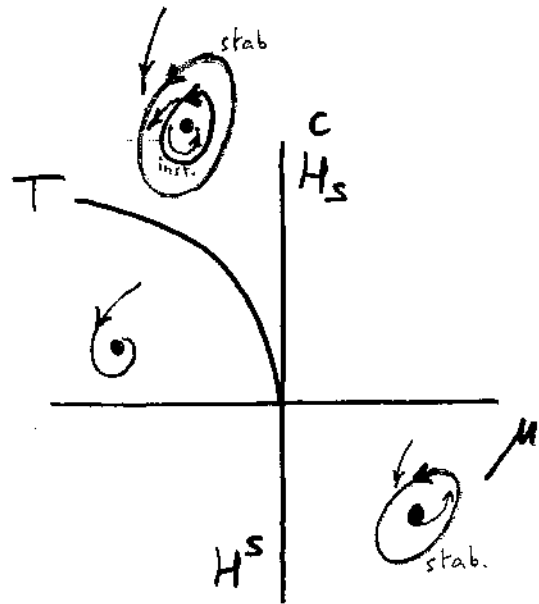
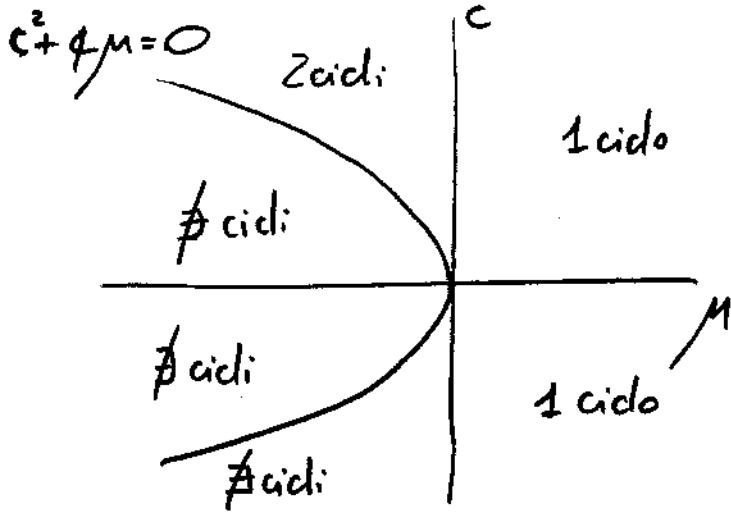
$$\text{tr} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}} = 0 \quad \det \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}} > 0$$

BIFORCAZIONE DI HOPF DEGENERE

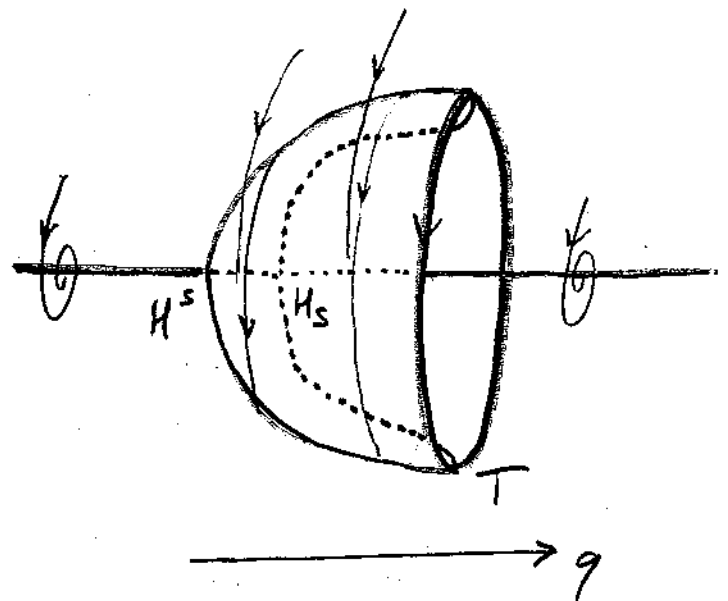
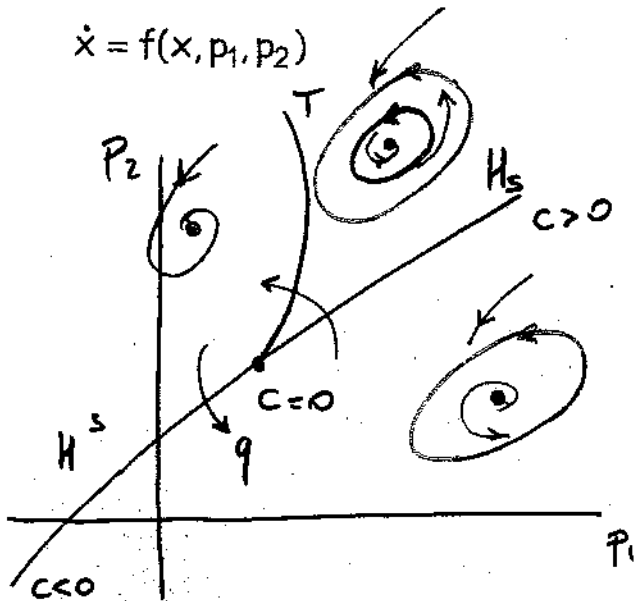
$$\dot{\rho} = \mu\rho + c\rho^3 - \rho^5 \Rightarrow \dot{\rho} = \rho(\mu + c\rho^2 - \rho^4)$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

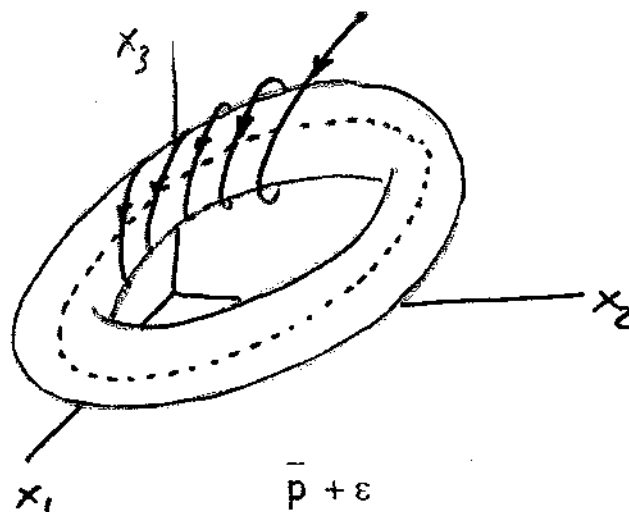
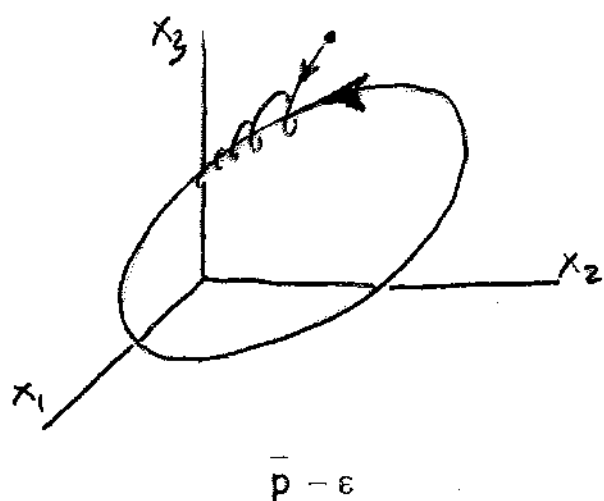
Equilibri $\rightarrow \dot{\rho} = 0 \rightarrow \bar{\rho} = \sqrt{\frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4\mu}}{2}}$



T = tangente di cicli
 H^S = Hopf supercritica
 H_S = Hopf subcritica

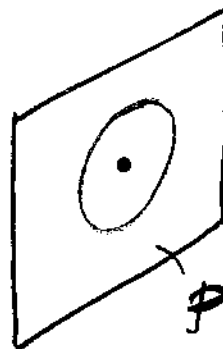
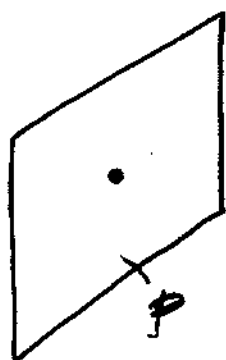


BIFORCAZIONE NEIMARK-SACKER



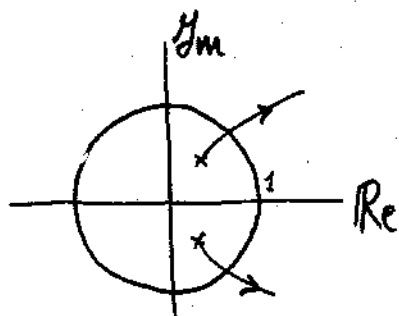
- collisione tra un toro che si restringe e un ciclo (interno al toro)

Sulla sezione di Poincaré



$p = \bar{p} \rightarrow$ lo Jacobiano della mappa di Poincaré ha autovalori complessi coniugati con modulo unitario

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta} \quad \frac{\theta}{2\pi} = \text{irrazionale} \Rightarrow \text{toro}$$

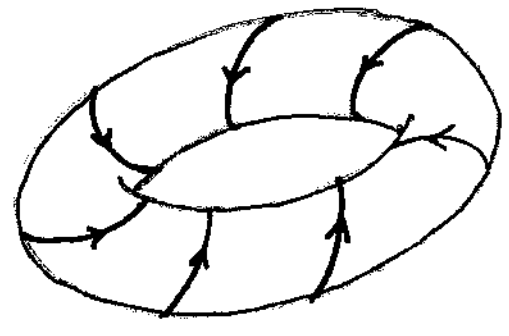


AGGANCIO IN FREQUENZA

$$p = \bar{p} \Rightarrow \text{Neimark-Sacker} \Rightarrow \lambda_{1,2} = e^{\pm i\vartheta}$$

$$\text{Se } \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{m}{q} = \text{razionale} \rightarrow q\vartheta = m2\pi$$

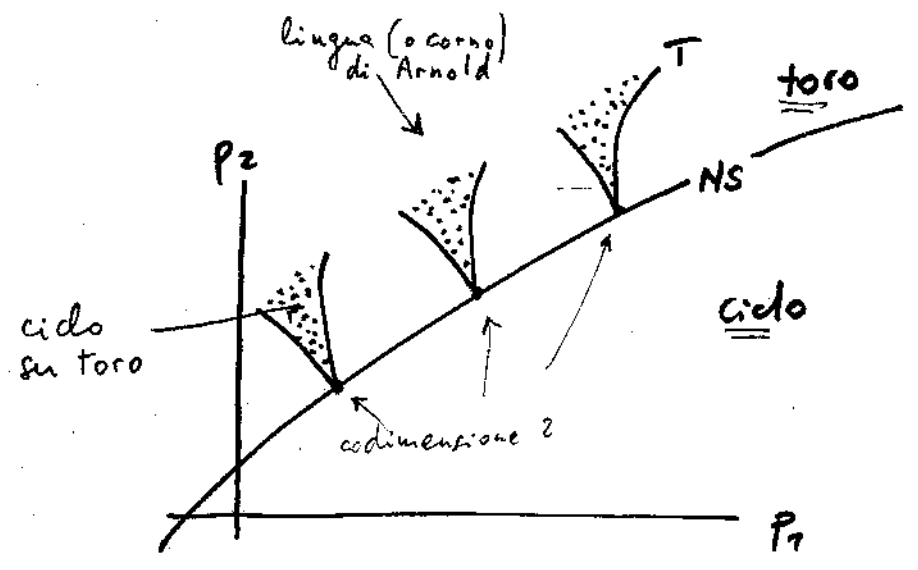
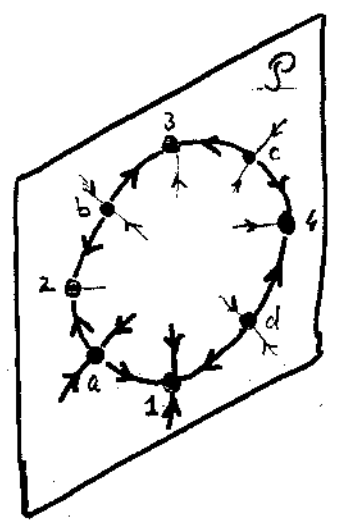
- ⇒ dopo q intersezioni della traiettoria con la mappa di Poincaré si ritorna al punto di partenza
- ⇒ ciclo sul toro



Il ciclo rimane sul toro vicino alla Neimark-Sacker ⇒ aggancio in frequenza.

Tutte le traiettorie sul toro tendono verso il ciclo stabile sul toro: questa situazione scompare mediante biforcazione tangente di cicli.

Sulla sezione di Poincaré



Il ciclo stabile su toro attraversa la sezione di Poincaré nei punti 1, 2, 3 e 4. Sul toro c'è però anche un ciclo sella a, b, c, d.

T = tangente di cicli
NS = Neimark-Sacker