Analisi di sistemi planari con pplane

1 Modello di epidemie

Si consideri il sistema seguente (modello di Kermack-McKendrick) che descrive lo sviluppo dell'epidemia di una particolare malattia

$$\dot{S} = -aSI$$
$$\dot{I} = aSI - bI$$

dove S ed I rappresentano, rispettivamente, la densità degli individui sani (ma suscettibili di essere infettati) e degli individui infetti (che possono trasmettere l'infezione prima di morirne o guarirne, diventando in questo caso sani ma non suscettibili perché dotati di anticorpi).
Si supponga che, in assenza di una politica di controllo dello sviluppo dell'epidemia, la probabilità di contagio a sia pari a $\frac{1}{20}$ mentre il tasso di guarigione dalla malattia b sia pari a 20.
Supponendo che la densità iniziale di individui suscettibili sia pari a 1000, valutare mediante pplane se l'epidemia si sviluppa oppure no. Si spieghi il risultato ottenuto.
Si propongano delle azioni di controllo (corrispondenti a opportune variazioni parametriche) che evitino lo sviluppo dell'epidemia o che, al limite, la rendano meno grave supponendo, per esempio, che al più il 20% della popolazione contragga la malattia.

2 Modello di competizione interspecifica

Sia dato il modello di competizione interspecifica tra due popolazioni batteriche

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - a x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - a x_1 x_2$$

dove x_1 è la densità di batteri utili e x_2 la densità di batteri nocivi per la buona salute dell'individuo che li ospita.
I valori dei parametri sono: $r_1 = 5$, $r_2 = 5$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $a = 10$.
Mediante pplane verificare che il modello presenta due equilibri stabili alternativi corrispondenti alla dominanza di una sola delle due specie batteriche, valutandone anche i bacini di attrazione.
Supponendo che si instauri una situazione che porti a uno stato di malattia (dominanza di batteri nocivi), cercare una possibile terapia (come già visto a lezione) che garantisca la guarigione dell'individuo.

3 Modello risorse-consumatori

Sia dato il modello di Rosenzweig-MacArthur

$$\dot{x}_1 = r x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{a x_1}{b + x_1} x_2$$
$$\dot{x}_2 = e \frac{a x_1}{b + x_1} x_2 - m x_2$$

dove x_1 è la densità di risorse, x_2 la densità di consumatori, $r = m = 1$, $K = 6$, $b = 2$ ed $e = 0.5$.
Utilizzando pplane si simuli l'andamento del sistema per i seguenti valori di a: 2.6, 3.3 e 5.
Osservando nei tre casi la posizione delle isocline intuire una possibile "regola" che permetta di prevedere il comportamento del modello (estinzione dei consumatori, coesistenza stazionaria risorse-consumatori, coesistenza ciclica risorse-consumatori).