Analisi di biforcazione con MatCont

Modello risorse-consumatori

Si consideri il seguente modello risorse (x_1) – consumatori (x_2) in presenza di sfruttamento (P)

$$\dot{x}_1 = rx_1\left(1-\frac{x_1}{K}\right) - a_1\frac{x_1}{b_1+x_1}x_2$$
$$\dot{x}_2 = e_2a_1\frac{x_1}{b_1+x_1}x_2 - m_2x_2 - a_2\frac{x_2}{b_2+x_2}P$$

I valori di riferimento dei parametri, eccetto P, sono:

$r = 1$; $K = 1$; $a_1 = 1$; $b_1 = 0.2$; $e_2 = 1$; $m_2 = 0.5$; $a_2 = 1$; $b_2 = 0.4$.

a) Si simuli il sistema per P = [0.1; 0.147; 0.16; 0.2].
b) Si tracci il diagramma di biforcazione nello spazio (P, x_1, x_2).
c) Si tracci il diagramma di biforcazione nello spazio (P, K) con $P \in [0, 0.5]$ e $K \in [0, 3]$.
d) Si supponga ora che, per motivi stagionali, lo sfruttamento P possa variare periodicamente nel tempo secondo l'espressione

$$P(t) = \bar{P}(1 + \varepsilon sen\omega t) \qquad \omega = 0.2$$

Si dica se, per opportuni valori di $\bar{P}$ ed ε, il sistema possa avere andamento caotico[1]. In caso affermativo, se ne mostri una sezione di Poincaré[2] e se ne calcoli il primo esponente di Lyapunov[3].
e) Si supponga ora che lo sfruttamento dei consumatori sia dovuto a una terza popolazione di predatori che evolve nel tempo con dinamica

$$\dot{P} = e_Pa_2\frac{x_2}{b_2+x_2}P - m_PP \qquad m_P = 0.01$$

Si dica se, per opportuni valori di e_p, la dinamica del sistema diviene caotica. In caso affermativo, si mostri l'attrattore nello spazio (P, x_1, x_2) caratterizzandolo con una sua sezione di Poincaré, e calcolando il suo primo esponente di Lyapunov. Si verifichi infine la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

---

[1] MatCont analizza solo sistemi autonomi. E' pertanto necessario sostituire la funzione $sen\omega t$ con una nuova variabile x_3 del sistema. Ciò si ottiene aggiungendo al sistema dato due nuove variabili di stato x_3 e x_4 descritte da

$$\dot{x}_3 = x_3 + \omega x_4 - (x_3^2 + x_4^2)x_3$$
$$\dot{x}_4 = x_4 - \omega x_3 - (x_3^2 + x_4^2)x_4$$

la cui soluzione a regime rende x_3 proprio pari il comportamento desiderato.

[2] Per trovare, per esempio, i punti con x3 circa pari a 0 e visualizzare la sezione di Poincaré, si possono in prima approssimazione usare i comandi

```
dati=[];
for indice=1:length(t)-1
    if (x(3,indice)<0 & x(3,indice+1)>0)|(x(3,indice)>0 & x(3,indice+1)<0)
        dati=[dati;indice];
    end;
end;
figure; plot(x(1,dati),x(2,dati),'.');
```

[3] Per calcolare gli esponenti di Lyapunov si faccia riferimento ai file allegati all'esercitazione.